UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Gabriel Luiz Borghetti
Marcele Cristine Assis
Thays Perin
Rafael Tramontini Tech

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

CASCAVEL
2021

Gabriel Luiz Borghetti
Marcele Cristine Assis
Thays Perin
Rafael Tramontini Tech

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientadora: Profª. Drª Fabiana Magda Garcia Papani

CASCAVEL
2021

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A disciplina “Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I” é composta por 68 horas de aulas teóricas e 204 horas de prática. As 204 horas de atividades práticas estão distribuídas em 102 horas referente ao projeto PROMAT e 102 horas dedicadas às atividades na escola. Esse relatório de atividades se refere às 102 horas das atividades realizadas no projeto PROMAT.

O PROMAT é um Projeto do Colegiado do Curso de Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino que buscam acesso a cursos superiores. Durante o projeto, os alunos das disciplinas Metodologias ministram aulas abordando conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da UNIOESTE, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, objetivando a apropriação de tais conceitos por parte desses alunos do Ensino médio.

Em decorrência da pandemia ocasionada pelo COVID-19, o PROMAT 2021 ocorreu de maneira inteiramente virtual, sendo realizada pelo aplicativo Jitsi Meet. Além disso, diferente dos outros anos, os conteúdos escolhidos para serem trabalhados no PROMAT 2021 foram escolhidos e baseados nos conteúdos mais frequentes do vestibular da UNIOESTE. Nos anos anteriores, esta escolha era feita com base nas provas do ENEM. Após a escolha e organização dos conteúdos gerais, foi decidido sob a orientação da Profª Fabiana, a distribuição dos conteúdos ao longo das aulas.

Os acadêmicos foram responsáveis pela execução de 9 aulas, que ocorreram nos sábados de manhã, das 09:00 às 11:30. Os dias de execução das aulas podem ser observados na tabela abaixo:

Tabela 01 – Cronograma das aulas e conteúdos

Encontro	Data	Conteúdo
1	06/03/21	Relações
2	13/03/21	Função Afim
3	20/03/21	Função Quadrática
4	27/03/21	Polinômios
5	10/04/21	Sequências e Progressão Aritmética
6	17/04/21	Progressão Geométrica
7	24/04/21	Sistemas de Equações

8	08/05/21	Sistemas de Equações e Matrizes
9	15/05/21	Exercícios

Fonte: Acervo dos autores,

Esse relatório foi organizado e dividido da seguinte forma: esta primeira parte aborda a introdução e sintetiza o que aconteceu durante a execução do projeto e como aconteceu, além de trazer uma descrição do projeto PROMAT juntamente com os conteúdos escolhidos pelos acadêmicos para serem trabalhados durante a execução do projeto. A segunda parte apresenta uma fundamentação teórica, em forma de artigo científico, com base na metodologia de resolução de problemas, escolhida pelos acadêmicos para o desenvolvimento das aulas do projeto PROMAT, A terceira parte contém os planos das aulas e os relatórios das mesmas. Por fim, apresenta-se um capítulo com as considerações finais dos acadêmicos sobre a experiência do estágio.

2. OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

O ser humano ao longo de toda a sua existência tem resolvido problemas de diversos âmbitos. Desde os primórdios, resolver problemas é voltado à sobrevivência, pois todo problema surge da necessidade de se atingir um certo objetivo, observou-se então a grande capacidade do indivíduo de resolver e explorar problemas propostos. Com isso, associou-se essa capacidade à aprendizagem, surgindo a metodologia de Resolução de Problemas, que possibilita aos alunos instigar o conhecimento e manifestar a capacidade de gerenciar as informações que estão a seu alcance. Na matemática as perspectivas da resolução de problemas trazem consigo um grande potencial didático, pois permitem que os alunos procurem alternativas para ultrapassar obstáculos, utilizando a curiosidade como artefato para o "fazer matemática".

Por conta disso, a opção teórica e metodológica escolhida pelos acadêmicos, para o PROMAT, foi a resolução de problemas. Antes de nos aprofundarmos sobre a resolução de problemas, é preciso caracterizar o que entendemos por problema. Entre diversas definições, destacamos as que mais nos chamam a atenção no âmbito de educação matemática: Polya (1978) afirma que ter um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível. Thompson (1989) afirma que um problema inclui quebra-cabeças, labirintos e atividades, além disso considera que problemas devem possibilitar uma variedade de abordagens para a sua solução, não devendo depender só de elementos previamente conhecidos, mas conduzir à busca e descoberta de novas ideias que, em geral, envolvem desafios, diversões e frustrações. Sob outra concepção, Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004) apontam que um problema é algo que não sabemos como fazer, mas que estamos interessados.

A expressão "resolução de problemas", é abrangente e pode ter um mesmo significado para diferentes pessoas ao mesmo tempo, mas também pode ter significados diferentes para as mesmas pessoas em ocasiões diferentes, porém acreditamos que Krulik e Reys (1997) versam acertadamente sobre sua a definição do seguinte modo:

> "Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato

> os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.”

Assim, podemos dizer que, “resolução de problemas” significa resolver uma tarefa cuja solução e método de solução não são conhecidos de imediato, onde para solucionar o problema os alunos devem aplicar seus conhecimentos matemáticos.

Levando em conta o cenário de isolamento social vivido pelo COVID-19, as aulas do PROMAT foram inteiramente virtuais, sendo ministradas pelo aplicativo Jitsi Meet. Resolvemos utilizar a resolução de problemas em nossas aulas do PROMAT por acreditar que essa metodologia traz consigo um grande potencial didático e seria mais impactante para os alunos, além de proporcionar uma aula dinâmica. Para isso, todas as aulas foram pensadas e criadas visando ter um problema “gatilho” que nos permitiria chamar a atenção dos alunos e interagir com eles, para que, após uma breve conversa a respeito das ideias deles, pudéssemos introduzir o conteúdo formalmente. Após a formalização do conteúdo, os alunos seriam novamente questionados sobre o exercício proposto para que, por fim, resolvessem, ou expressassem, suas dúvidas.

A opção por utilizar um problema como gatilho para introduzir o conteúdo pode trazer alguns empecilhos, como não termos a interação desejada. Segundo Lester (1994) uma das razões para que os alunos não sejam capazes de resolver problemas é que não são dadas oportunidades a eles para se envolverem realmente na resolução de problemas. Por isso é primordial que o professor incentive e interceda as ideias dos alunos, para que elas sejam produtivas, levando os alunos a pensarem e a criarem o seu próprio conhecimento. Assim, a sala de aula, no nosso caso virtual, deve ser um ambiente de cooperação e de exploração, mas também de descoberta, deixando claro para os alunos que o mais importante é o conhecimento adquirido ao longo processo e não a resposta final. Nessa metodologia, o aluno é o protagonista do seu próprio conhecimento e deste modo ocorre um maior desenvolvimento da sua leitura, da sua criatividade, fruto do pensamento de como resolver um problema e do seu raciocínio lógico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) comentam que quando se utiliza a metodologia de resolução de problemas em sala o processo de ensino e aprendizagem na matemática se desenvolve de forma produtiva. Isso fica evidente quando a resolução de problemas é utilizada de forma continuada, assim como Zuffi e Onuchic (2007) sintetizam sua experiência com a metodologia resolução de problemas em sala de aula dizendo que tiveram

> "[...] fortes indícios de que é possível explorar tal metodologia com êxito, no ambiente natural da sala de aula, com todas as adversidades e facilidades que possamos encontrar. [...] que os alunos, embora tenham apresentado dificuldades iniciais com a "nova" metodologia, tiveram um envolvimento com sua própria aprendizagem muito superior àqueles de séries equivalentes, na mesma escola que evidenciaram grande participação e motivação, e que os alunos ao irem se familiarizando com essa forma de trabalho, os alunos ampliaram seus conhecimentos de Matemática de forma significativa."

Portanto, o principal motivo para escolhermos trabalhar com resolução de problemas foi porque acreditamos que com essa metodologia os alunos compreenderiam mais efetivamente os conteúdos, os princípios e os procedimentos matemáticos. E acreditamos que a verdadeira compreensão da matemática está atrelada à ideia de relacionar diferentes conceitos e abordagens.

3. PLANOS DE AULA

3.1 Plano de aula 1

Conteúdo: Relações entre dois conjuntos, Funções, Função constante.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de funções.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com relações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Fazer a distinção entre relação e função.
- Compreender conceitos básicos, como Domínio e Imagem de relação e função.
- Diferenciar funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras.
- Diferenciar relações e funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras por meio da representação gráfica.
- Identificar funções inversíveis.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Mentimeter, Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi Meet. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

No primeiro momento, será realizada uma dinâmica com o objetivo de obter uma interação inicial entre os alunos e os professores. Essa dinâmica consiste em solicitar aos alunos que respondam, pela plataforma Mentimeter, a pergunta “O que vem em sua cabeça quando falamos de função?”. As respostas serão dispostas para todos, a partir de uma nuvem de palavras. Espera-se que apareça a palavra “relação” ou algum sinônimo. Após comentar sobre os resultados obtidos, será feita uma breve explicação sobre o PROMAT.

Em seguida, será iniciado a apresentação do conceito de relação a partir da ideia de relação familiar, considerando que essa ideia é bastante intuitiva. Para isso, os alunos serão convidados a responder alguns questionamentos relacionados a seguinte árvore genealógica:

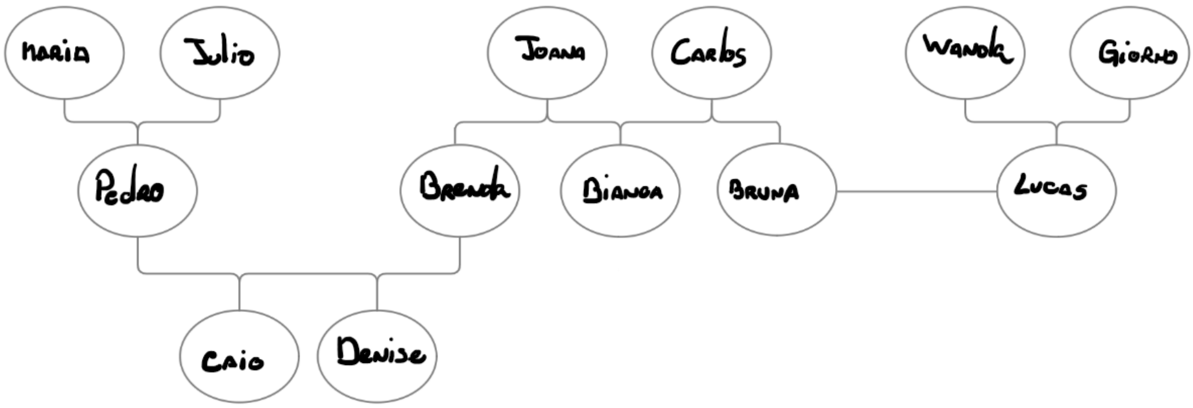


Figura 1: Árvore genealógica.
Fonte: Acervo dos autores.

Serão definidas as relações “mãe de” representada por m( ), “pai de” representada por p( ), “filho/filha de” representado por f( ) e “irmão de” representada por i( ).

Os alunos serão convidados a completarem as seguintes relações:

a) m(Brenda) =

b) p(Pedro) =

c) p(Bruna) =

d) i(Bianca) =

e) i(Caio) =

f) m(   ) = Joana

Espera-se que os alunos consigam visualizar as relações familiares e respondam corretamente às perguntas.

Em sequência será questionado se as relações “mãe de”, “irmão de” e “filho/filha de” são funções. Para isso, serão definidos os conceitos de Relação e Função:

Definição de relação:

"Dados dois conjuntos A e B, chamamos de Relação uma associação entre elementos do conjunto A com elementos do conjunto B".

Definição de função:

"Chamamos de função de A em B a relação do conjunto A no conjunto B em que, todos os elementos do conjunto A estão relacionados a algum elemento de B e um mesmo elemento de A não está relacionado a dois ou mais elementos distintos de B".

Na sequência serão feitos os seguintes exemplos de relações entre conjuntos numéricos, será questionado aos alunos se essas relações são ou não funções. Usar-se-á os termos "conjunto de partida" para o conjunto A e "conjunto de chegada" para B. Pretende-se especificar que não há restrições para o "conjunto de chegada", pode por exemplo, sobrar elementos em B:

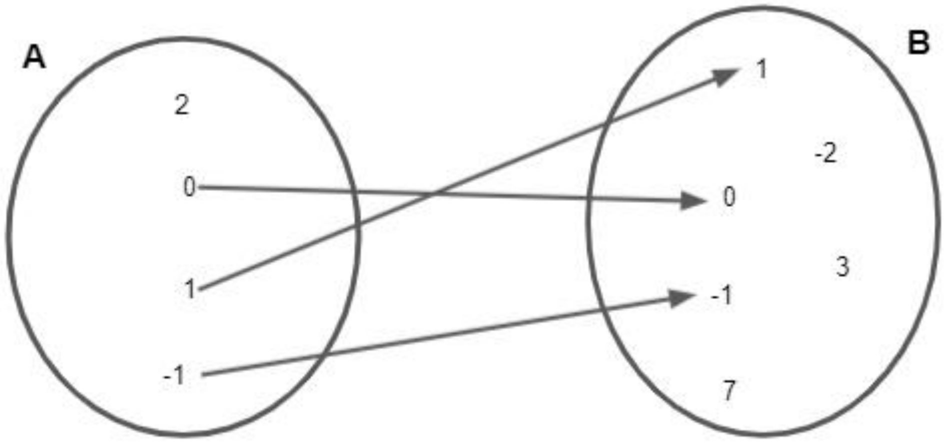


Figura 2: Exemplo 1: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

No exemplo acima (Figura 02), espera-se que os alunos identifiquem que a relação não é função, pois existe um elemento {2} do conjunto de partida (A) que não tem relação com nenhum elemento do conjunto de chegada (B).

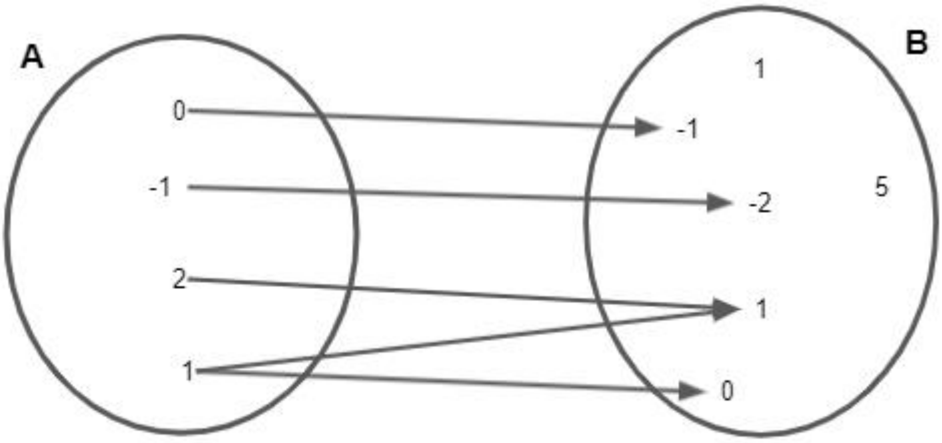


Figura 3: Exemplo 2: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

No exemplo acima (Figura 03), espera-se que os alunos identifiquem que a relação não é função, pois existe um elemento {1} do conjunto de partida (A) que, ao mesmo tempo, se relaciona com dois elementos (1 e 0) do conjunto de chegada (B).

Nos próximos exemplos (Figuras 04, 05, 06 e 07), espera-se que os alunos identifiquem que a relação é função, pois todos os elementos do conjunto de partida (A) tem relação com um elemento do conjunto de chegada (B) e um mesmo elemento de A não está relacionado com dois elementos distintos de B”.

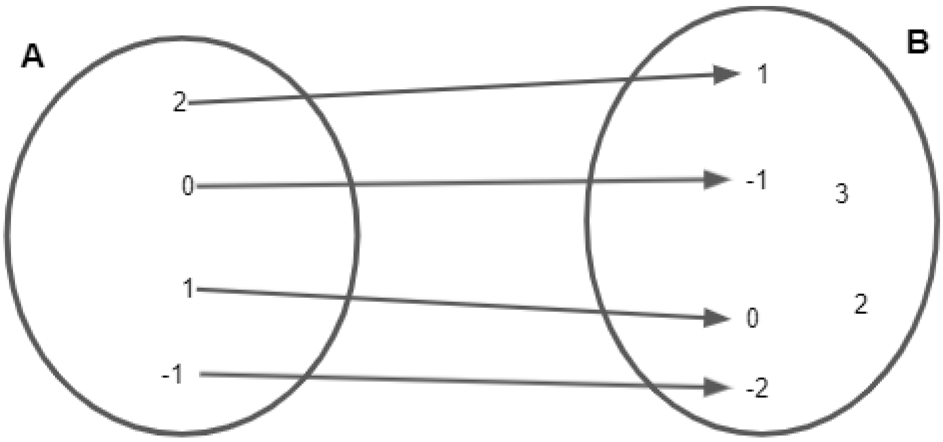


Figura 4: Exemplo 3: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

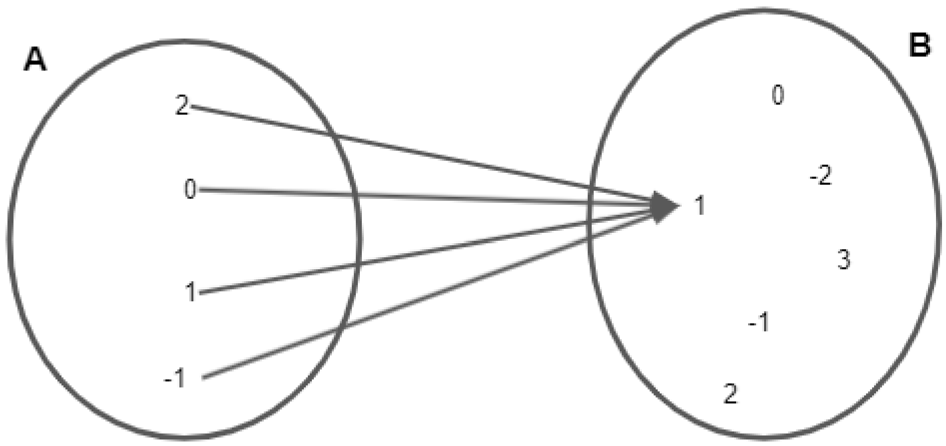


Figura 5: Exemplo 4: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

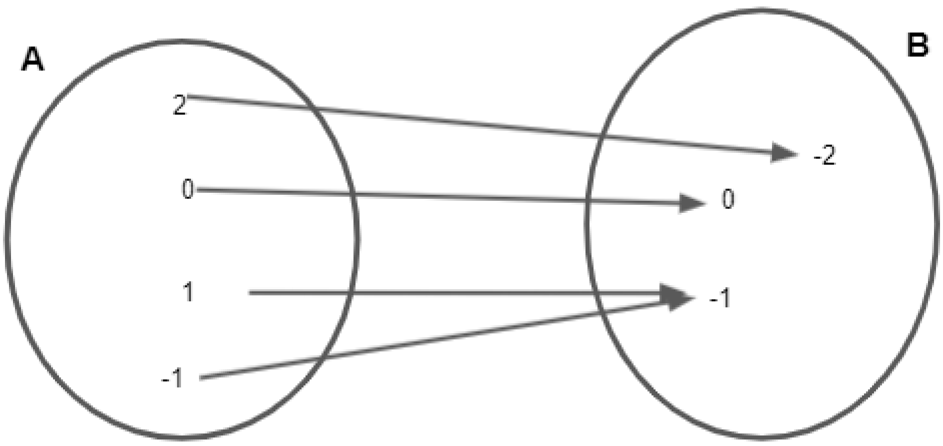


Figura 6: Exemplo 5: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

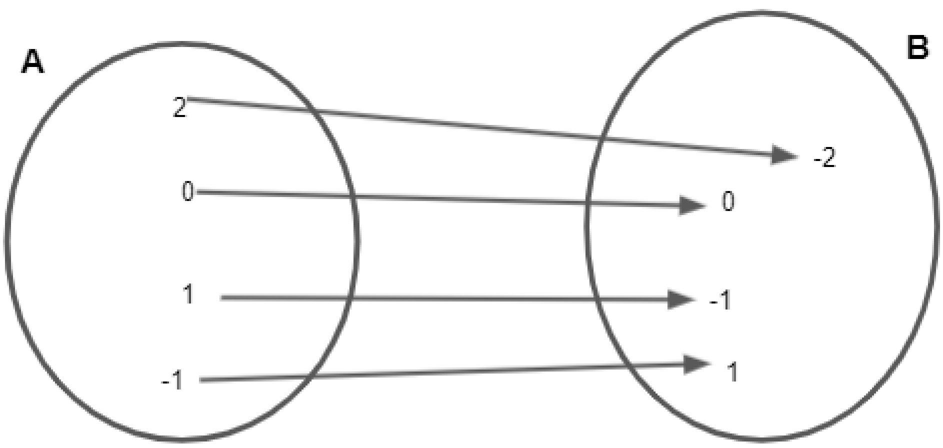


Figura 7: Exemplo 6: Relação entre os conjuntos A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

Em seguida, será definido Domínio, Contradomínio e Imagem da seguinte forma:

Sejam A e B conjuntos não vazios. Seja f uma relação de A em B.

Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

Domínio = “conjunto de partida”

Isto é,

D = A

O conjunto B (conjunto de chegada) é chamado de contradomínio.

Chamamos de imagem o conjunto Im(f) dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto:

Imagem é um subconjunto do contradomínio

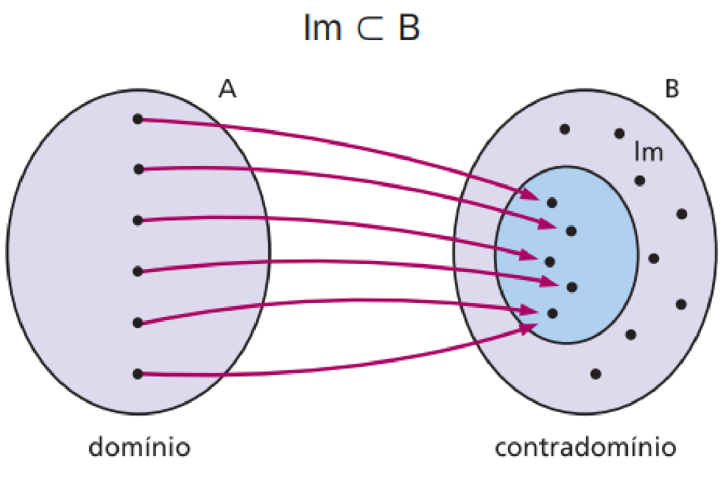


Figura 8: Representação domínio e contradomínio.

Fonte: Gelson Iezzi. Vol 1. Pg 88.

Em seguida será apresentado a seguinte notação de função:

Sejam A e B conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Nos casos em que f é função usaremos a notação f(x)=y para indicar que o par (x,y) está na relação. Por exemplo, na função “mãe de” que leva filhos nas mães, m(Caio)=Brenda.

Para indicarmos uma função f, definida de A em B segundo a lei de correspondência y=f (x), usaremos uma das seguintes notações:

$$f: A \to B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

$$x \longmapsto f(x) \qquad\qquad x \longmapsto f(x)$$

Observa-se que quando temos relações que não são funções esta notação fica complicada, por exemplo, na relação “filho/filha de” que leva mães nos filhos escreveríamos f(Brenda)=Caio ou f(Brenda)=Denise?

Em seguida, será comentado sobre a representação gráfica de uma função. Será explicado brevemente o que é um plano cartesiano, que os eixos x e y são retas reais e que representam, respectivamente, o domínio e o contradomínio de uma função f, e que se chama os eixos x e y de eixo das abcissas e das ordenadas. Além disso, relacionar-se-á que cada valor da função f no gráfico pode ser representado, pontualmente, pelo par ordenado (x,y) e que a intersecção entre os eixos acontece no ponto (0,0), chamado de origem.

A partir de exemplos de gráficos, os alunos serão indagados sobre se estes gráficos representam funções. Lembrar-se-á que para ser função um mesmo elemento do eixo “x” (domínio) não pode estar relacionado, ao mesmo tempo com dois elementos distintos do eixo “y” (contradomínio), e por conta disso, será utilizado o teste da reta vertical que consiste em traçar infinitas retas imaginárias paralelas ao eixo das ordenadas (eixo y) e verificar se alguma destas retas interceptam o gráfico em dois ou mais pontos. Caso isso ocorra, é possível dizer que a relação não é função. Pois, significa que a relação associa duas imagens para um mesmo número real x. Além disso, será necessário verificar se todo elemento do eixo x possui uma imagem ou se o domínio deve ser delimitado a um subconjunto específico de IR.

No exemplo a seguir (Figura 09), espera-se que os alunos respondam que essa relação é função, pois todos os elementos do domínio, tem relação com um elemento do contradomínio. Além disso, um mesmo elemento do eixo x está relacionado a apenas um elemento do eixo y, pois as retas são paralelas ao eixo y e interceptam o gráfico em um único ponto.

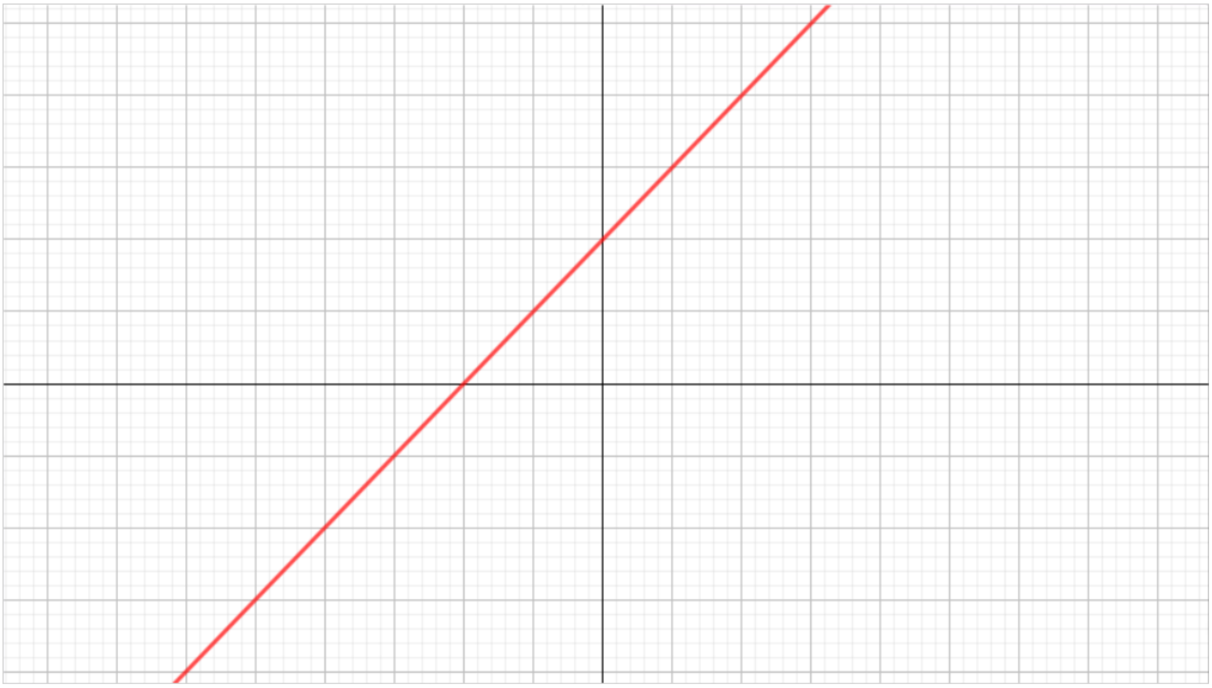


Figura 9: Exemplo 1: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

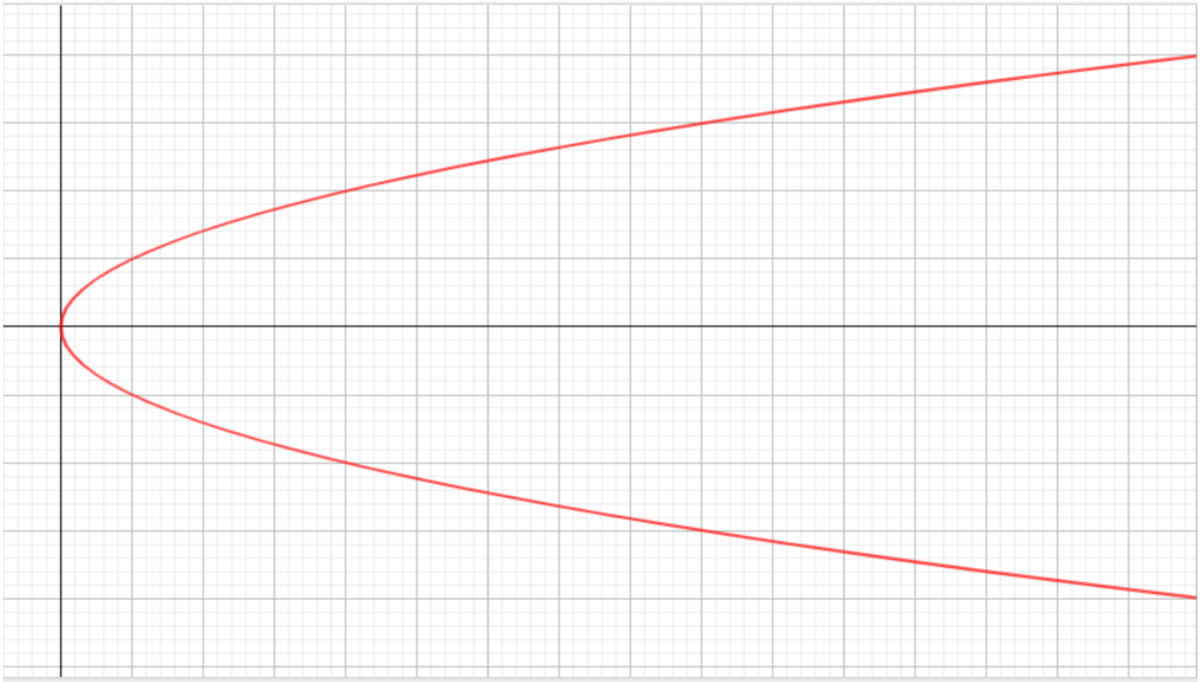


Figura 10: Exemplo 2: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

No exemplo anterior (Figura 10), acredita-se que alunos vão responder que a relação não é função, considerando que o domínio não está definido para os reais negativos e, além disso, ao se traçar retas paralelas ao eixo y é possível perceber que para todo x pertencente aos reais positivos a reta corta o gráfico em dois pontos.

No próximo exemplo (Figura 11) acredita-se que alunos vão responder que a relação não é função, considerando que o domínio não está definido para todo o IR. Os alunos serão questionados, em seguida, se ao restringir o domínio a relação é função, visto que que um mesmo elemento do eixo x não está relacionado, ao mesmo tempo, a dois, ou mais, elementos distintos do eixo y, pois as retas paralelas ao eixo das ordenadas intersectam a função em um único ponto.

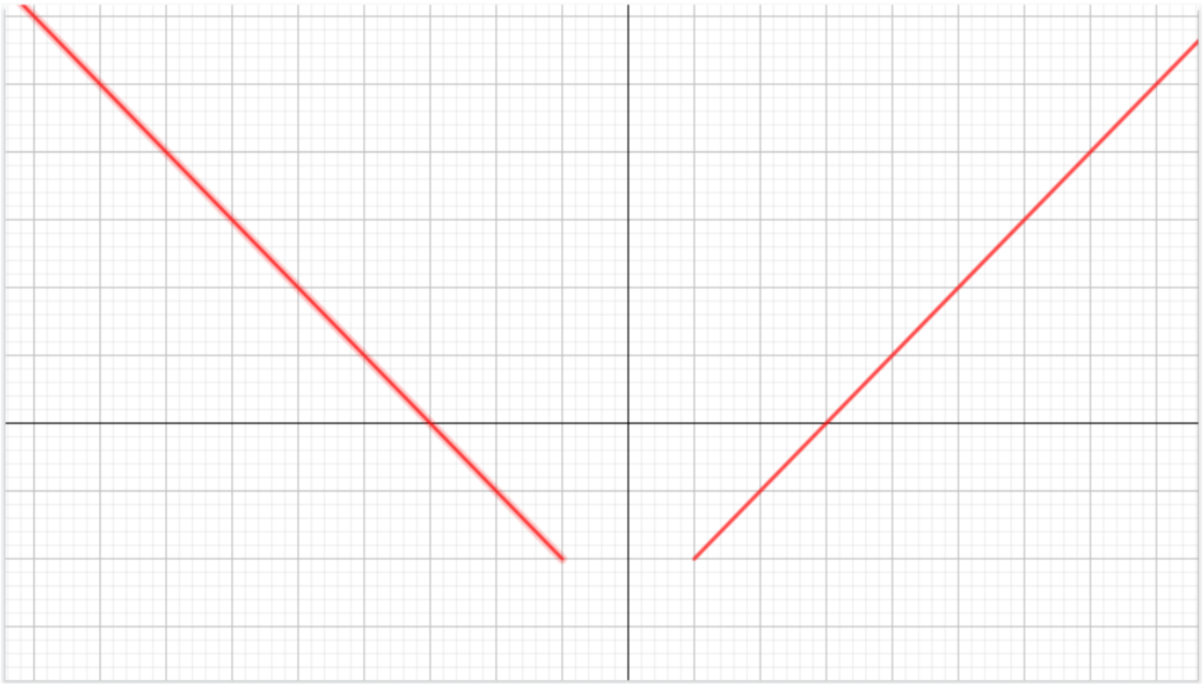


Figura 11: Exemplo 3: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

Outros exemplos gráficos (Figuras 12, 13, 14 e 15) serão apresentados e sempre será explorado se as relações, cujos gráficos são apresentados, são ou não funções.

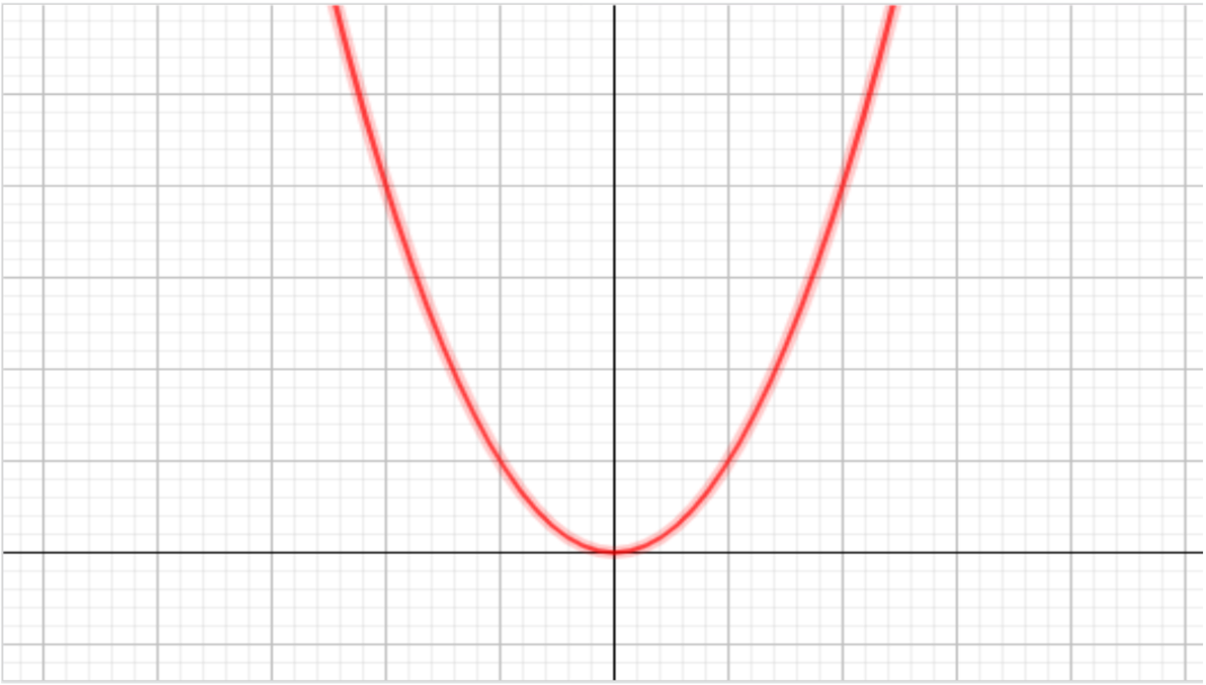


Figura 12: Exemplo 4: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

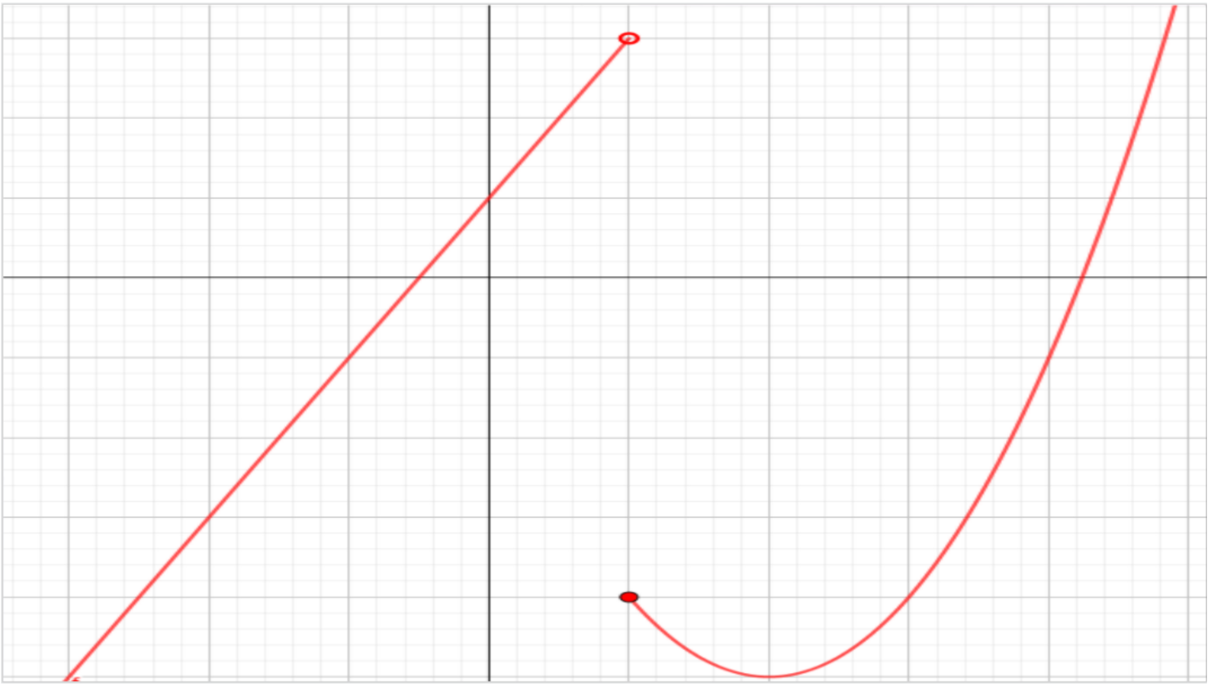


Figura 13: Exemplo 5: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

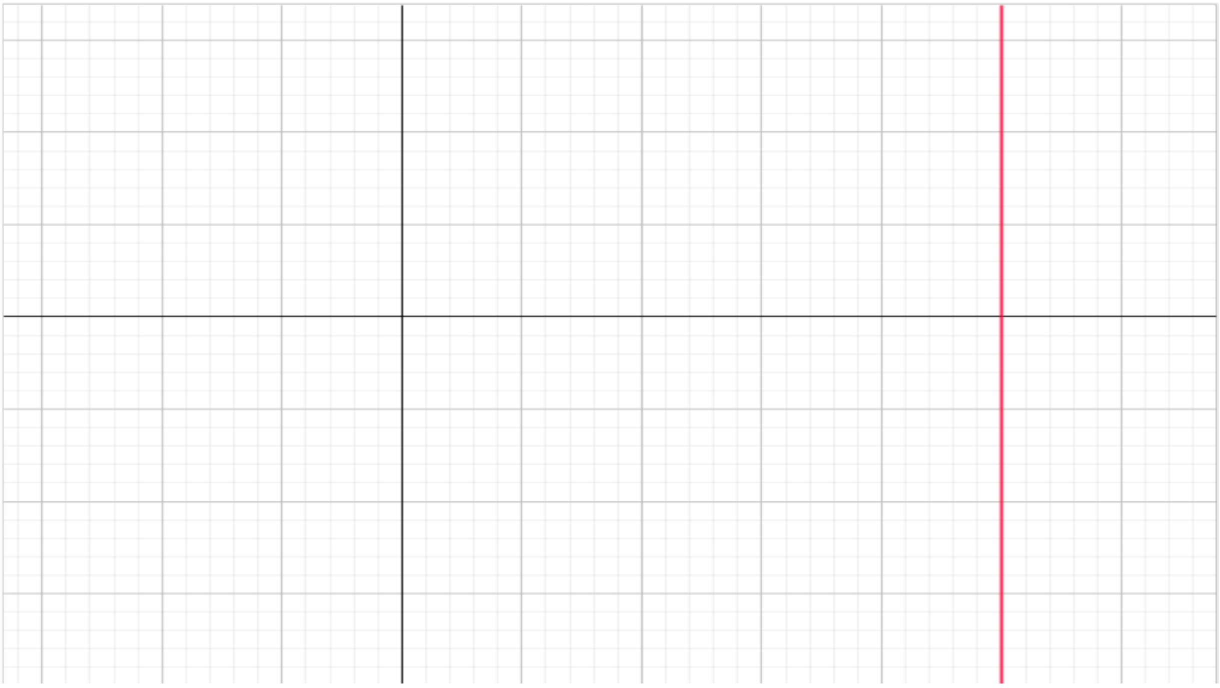


Figura 14: Exemplo 6: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 15: Exemplo 7: Gráfico de uma relação.

Fonte: Acervo dos autores.

A partir do último exemplo (Figura 15) será definido função constante.

Sejam A, B subconjuntos não vazios de IR e b ∈ B. Chamamos de função constante a função f: A → B tal que f(x) = b, para qualquer x ∈ A.

O gráfico da função constante é representado por uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x) passando pelo ponto (0, b).

Após isso, será proposto o exercício 01:

Exercício 01: (UNIOESTE - 2020, Adaptado) Seja a um número real arbitrário. Suponha que f: R ⇒ R é uma função que satisfaz

f(k+x)=f(k)+xa

para quaisquer x ∈ R e k ∈ R. Então é correto afirmar que:

a)f é obrigatoriamente injetora.
b)Se a ≠ 0, então f é uma função da forma f(x)=mx+n.
c)f é obrigatoriamente crescente.
d)f possui duas raízes reais nos pontos em que x = a e x = k.
e)f é uma função da forma f(x)=ax²+mx+n, para algum m, n ∈ IR.

Para responder à pergunta anterior, será apresentado o conceito de função injetora.

Classifica-se uma função como injetora quando cada elemento da imagem está ligado a um único elemento do Domínio.

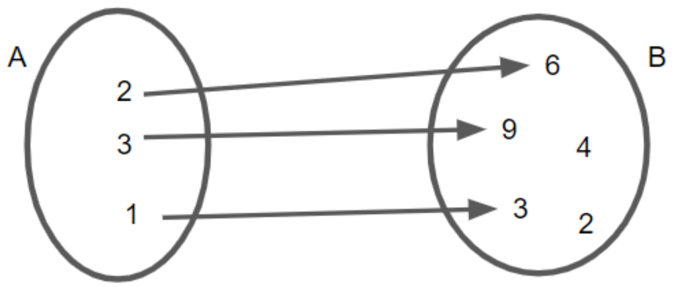


Figura 16: Função injetora entre o conjunto A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

Observe que nenhuma das flechas liga dois elementos do conjunto A ao mesmo elemento do conjunto B. Na função injetora, é possível sobrar elementos no conjunto B (elementos que não estejam ligados a nenhum elemento do conjunto A).

Na sequência será apresentado a solução do exercício.

Resolução:

A função não é obrigatoriamente injetora pois como o "a" é arbitrário e pertence aos reais pode-se ter a=0, então f(k+x)=f(k), para qualquer x (uma função constante). As funções constantes não são injetoras. O gráfico (Figura 17) e o diagrama (Figura 05) a seguir representam uma função constante.

Figura 17: Gráfico de uma função constante.

Fonte: Acervo dos autores.

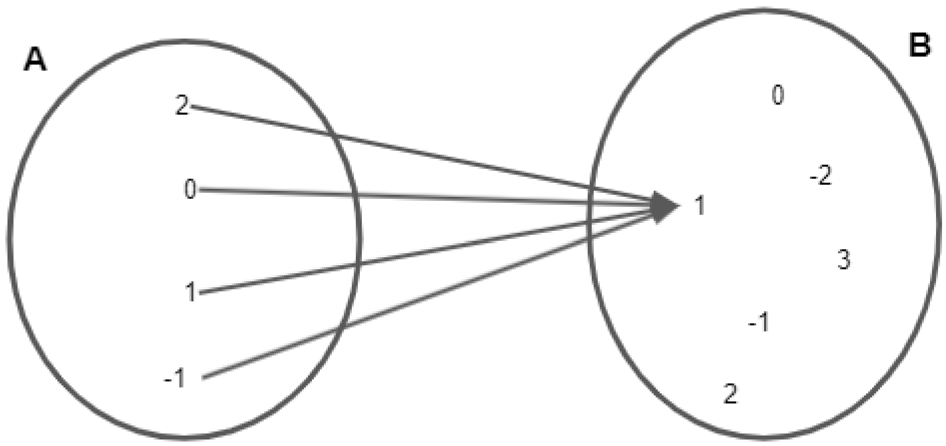


Figura 18: Exemplo de função não injetora entre o conjunto A e B

Fonte: Acervo dos autores

Em sequência será definido função sobrejetora e função bijetora.

Classifica-se uma função como sobrejetora quando sua imagem é igual ao contradomínio, ou seja, todos os elementos do contradomínio estão relacionados com algum elemento do domínio.

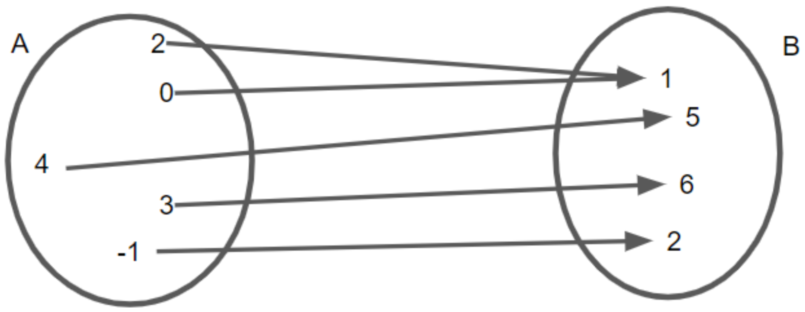


Figura 19: Exemplo de função sobrejetora entre o conjunto A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

Na função sobrejetora, é possível que dois ou mais elementos no conjunto A estejam associados ao mesmo elemento do conjunto B.

Uma função é considerada bijetora quando possui contradomínio igual à imagem e, ao mesmo tempo, quando elementos distintos do domínio têm imagens distintas. Isto é, uma função é bijetora se é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando isso acontece, cada elemento do domínio ficará ligado a um único elemento da imagem, e vice-versa.

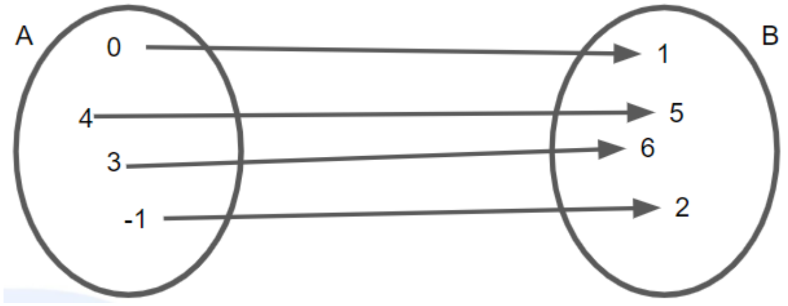


Figura 20: Exemplo de uma função bijetora entre o conjunto A e B.

Fonte: Acervo dos autores.

Em seguida, serão retomados os exemplos das funções já apresentadas (Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7) para agora perguntar se a função é injetora, se é sobrejetora e se é bijetora.

Espera-se que os alunos se lembrem que as relações das Figuras 2 e 3 não são funções então não podem ser injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

Espera-se que os alunos percebam que a função representada na Figura 4 é injetora, já que cada elemento do domínio só tem relação com um único elemento do contradomínio e que, por sobrar elementos no contradomínio, a relação não é sobrejetora.

Espera-se que os alunos percebam que a função representada na Figura 5 não é injetora, pois mais de um elemento tem a mesma imagem, neste caso, em específico, todos os elementos têm a mesma imagem. Não é sobrejetora, pois há elementos do contradomínio que não estão associados a nenhum elemento do domínio.

Espera-se que os alunos percebam que a função representada na Figura 6 não é injetora, pois mais de um elemento tem a mesma imagem (neste caso o 1 e -1 estão associados ao -1), mas é sobrejetora, pois todos os elementos do contradomínio estão relacionados a alguns elementos do domínio.

Espera-se que os alunos percebam que a função representada na Figura 7 é injetora, pois cada elemento do domínio liga-se a apenas um elemento do contradomínio, além de perceberem que a relação é sobrejetora, pois todos os elementos do contradomínio estão relacionados a um elemento do domínio e, consequentemente, a função é bijetora pois é injetora e sobrejetora.

Em seguida, o exercício 02 será utilizado como "gatilho" para definir função inversa.

Exercício 02: (BrasilEscola) Seja f uma função de A em B, cuja lei de formação é, $x^2 + 1$ sendo A={-2, -1, 0, 1, 2} e B={1, 2, 5}, é correto afirmar:

a) A função é inversível, pois ela é bijetora.

b) A função não é inversível, pois ela não é injetora.

c) A função não é inversível, pois ela não é sobrejetora.

d) A função não é inversível, pois ela não é sobrejetora e nem injetora.

e) A função não é inversível, pois ela é bijetora

Dados conjuntos não vazios, A e B e uma função f:A→B. A relação g:B→A que associa y a x sempre que f(x)=y nem sempre é uma função. No caso que esta relação é função dizemos que f é inversível e que tal relação, denotada por f^{-1} é a função inversa de f.

Se uma função f é bijetora então f é inversível e, se f não é bijetora não admite inversa.

Serão apresentados novamente o exemplo da Figura 4, porém da maneira da Figura 21, com um título sobre sua injetividade. Em seguida, será apresentada a Figura 22, que representa a relação inversa da Figura 21, para mostrar que funções não bijetoras não são inversíveis.

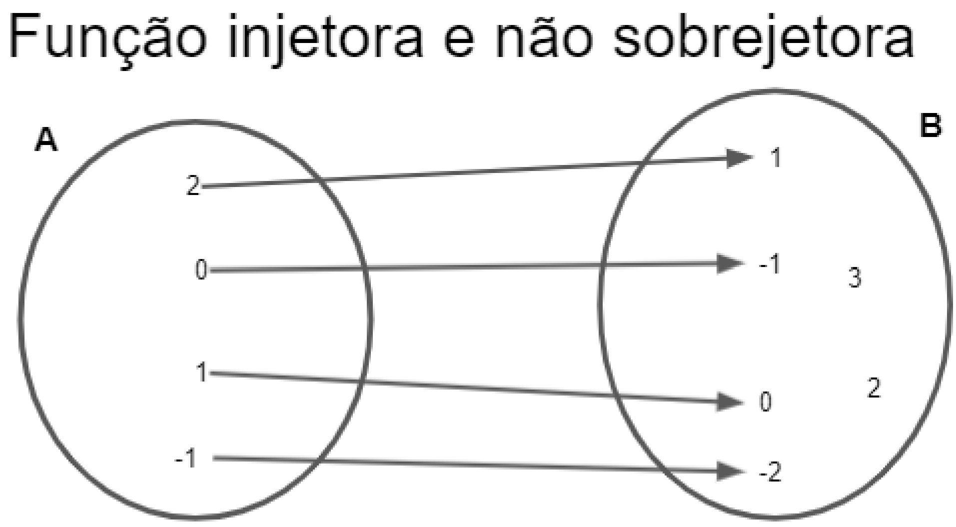


Figura 21: Representação de função injetora e não sobrejetora.

Fonte: Acervo dos autores.

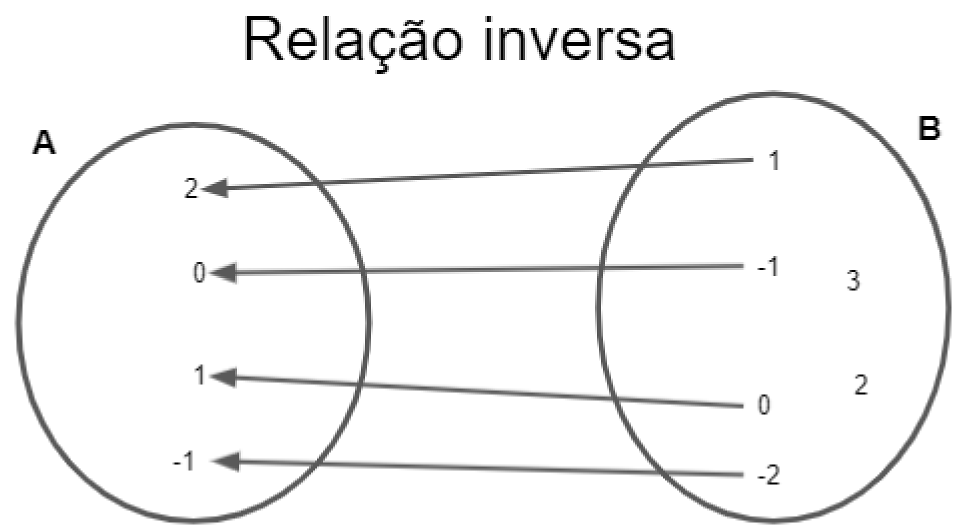


Figura 22: Relação inversa de uma função injetora e não sobrejetora.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos notem que a relação inversa de uma função não sobrejetora, neste caso somente injetora, não é função. Na relação inversa sobram elementos em seu domínio.

Da mesma maneira, em seguida será utilizado o exemplo da Figura 7, para criar a Figura 23 e a sua relação inversa, representada na Figura 24.

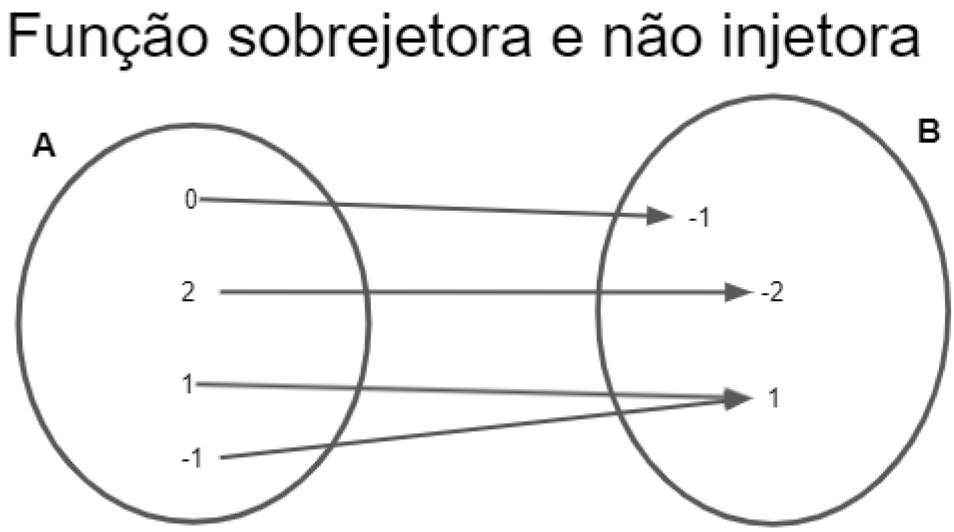


Figura 23: Representação de função sobrejetora e não injetora.

Fonte: Acervo dos autores.

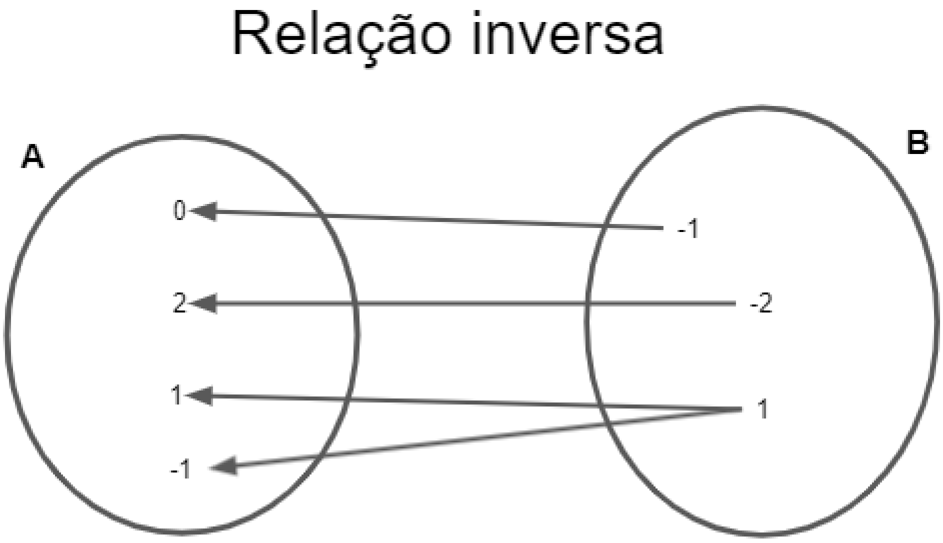


Figura 24: Relação inversa de uma função sobrejetora e não injetora.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que fique evidente que a relação inversa de uma função não injetora, neste caso somente sobrejetora, não é função. Na relação inversa existirá elementos do domínio que se relacionam com mais de um elemento do contradomínio da relação inversa.

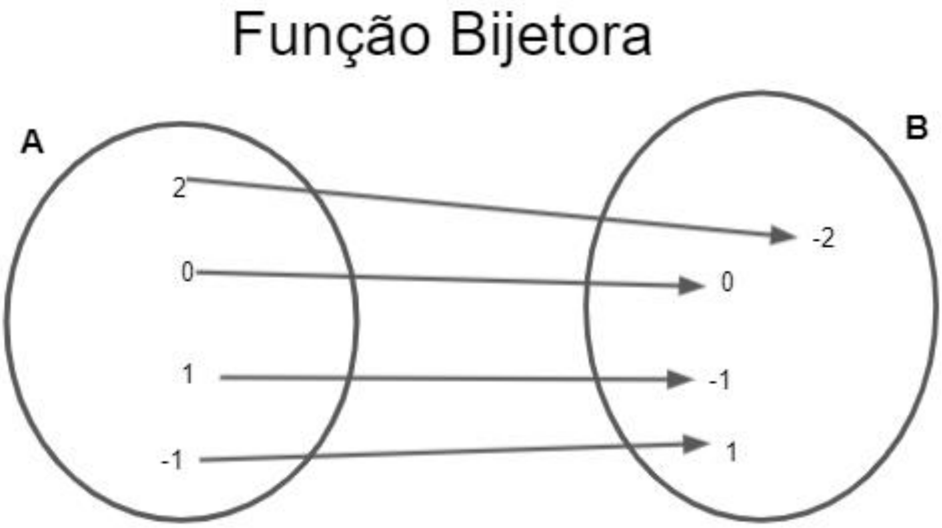


Figura 25: Representação função bijetora.

Fonte: Acervo dos autores.

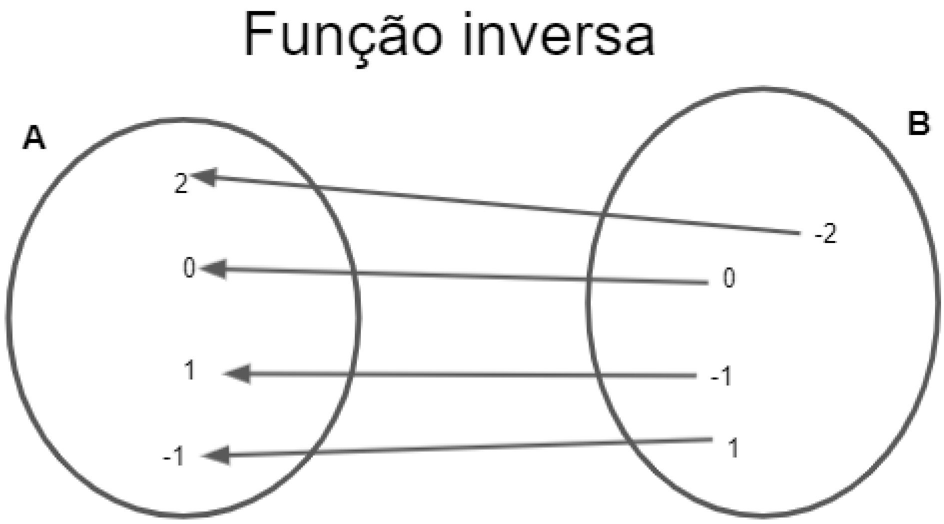


Figura 26: Relação inversa de uma função bijetora.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos percebam que a relação inversa de uma função bijetora é também uma função, pois cada elemento do domínio está relacionado a um único elemento do contradomínio.

Em seguida, o exercício 02 será retomado e resolvido.

Resolução do exercício 02:

Para que uma função seja inversível, é necessário que ela seja bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Deve-se calcular a imagem de cada um dos elementos de A,

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Note, que todos os elementos do conjunto B= {1, 2, 5} é imagem de algum elemento de A. Isto é, a função é sobrejetora.

Agora, f(-2) = f(2) = 5 e f(-1) = f(1) = 2. Logo, a função não é injetora e consequentemente não é bijetora. A alternativa correta é a letra b, "a função não é inversível, pois ela não é injetora".

Em seguida, será utilizado o software geogebra para fazer os gráficos das funções f(x) = 2x+1 e $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Nesse momento será comentado sobre a existência de simetria em relação a reta y=x, entre os gráficos dessas funções

No final, será trabalhado o conteúdo de função composta. Para isso, será retornado na árvore genealógica e será pedido aos alunos se o "Pai da mãe de fulano" é a mesma pessoa que "Mãe do Pai de fulano". Espera-se que os alunos respondam que não.

Após isso, será definido função composta.

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, a função composta de g com f é a função gof: A → C definida por (gof)(x) = g(f(x)), que é lida como "g bola f de x".

Para encontrar a função gof, para cada x em A (Domínio de F) aplicamos a função f, descobrimos qual é o valor relacionado a ele, e então aplicamos a função g neste valor

Sendo assim, a função gof relaciona cada elemento do domínio da função f com um único elemento do contradomínio da função g.

A função GoF relaciona cada elemento do domínio da função f com um único elemento do contradomínio da função g.

Exercício 03: Sejam os conjuntos A = {-1,0,1,2}, B = {0, 1, 2, 3, 4} e C = {1, 3, 5, 7, 9} e as funções

f: A→B, definida por f(x) = x²

g:B→C, definida por g(x) = 2x+1

Encontre (gof)(x) e determine o conjunto Domínio e Imagem.

A partir do exercício 03, será utilizado a imagem abaixo, no microsoft whiteboard, para explicar função composta, será inserido os respectivos valores aos respectivos conjuntos, assim como as relações entre esses segundo o estabelecido pelas funções, espera-se que os alunos compreendam o conteúdo proposto conforme a resolução seja feita.

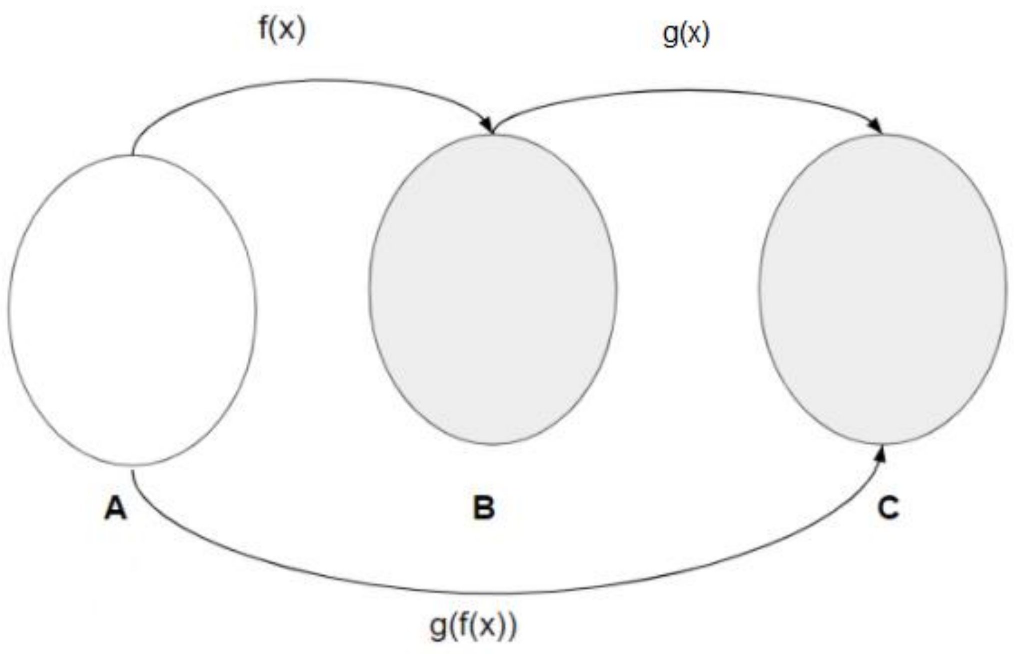


Figura 27: Representação de função composta.

Fonte: Acervo dos autores.

Resolução do exercício 03:

$$\boldsymbol{g \circ f(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 1}$$

Domínio é o conjunto A,

O Contradomínio é o conjunto C,

a Imagem são os elementos de C que tem correspondente em A, logo:

$$\boldsymbol{g \circ f(-1) = g(f(-1)) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3}$$

$$\boldsymbol{g \circ f(0) = g(f(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1}$$

$$\boldsymbol{g \circ f(1) = g(f(1)) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3}$$

$$\boldsymbol{g \circ f(2) = g(f(2)) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{Im(g \circ f) = \{1, 3, 9\}}$$

Na sequência será proposto o seguinte exercício:

Exercício 04: (UNIOESTE, 2019 - ADAPTADA) - Sejam f de R em R e g de R em R, definidas respectivamente, por $f(x) = 3 \cdot x$ e $g(x) = 3^x$. Defina os valores de $g(f(1)), g(f(2)), g(f(3)), g(f(n))$.

Resolução:

$$\boldsymbol{f(1) = 3 \cdot 1 = 3}$$

$$\boldsymbol{f(2) = 3 \cdot 2 = 6}$$

$$\boldsymbol{f(3) = 3 \cdot 3 = 9}$$

$$\boldsymbol{f(n) = 3n}$$

$$\boldsymbol{g(f(1)) = 3^3 = 27}$$

$$\boldsymbol{g(f(1)) = 3^6 = 729}$$

$$\boldsymbol{g(f(1)) = 3^9 = 19683}$$

$$\boldsymbol{g(f(n)) = 3^{3n}}$$

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores.

3.1.1 Relatório Aula 1

No dia seis de março de 2021, às 09 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado I, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os Acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula sobre o conteúdo inicial: Relações e Funções. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando o aplicativo jitsi. Observou-se que houve um número grande de alunos presentes na sala, mais precisamente, 31 alunos.

Os acadêmicos optaram por ministrar uma aula mais dinâmica, com o intuito de obter uma afinidade maior com os participantes. Para isso, foram utilizados softwares como:

- Mentimenter, para mensurar o conhecimento prévio dos alunos sobre funções. Foi realizado o questionamento “O que vem a sua cabeça quando falamos de função?”, A esta pergunta foram obtidas respostas como, por exemplo, “Relação entre dois conjuntos”, que relacionam o conteúdo de funções com relações em geral e corresponderam ao esperado;
- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;
- Geogebra que permitiu trabalhar com gráficos de maneira dinâmica.

A apresentação inicial do conteúdo funções foi realizada por meio de diagramas de Venn, considerando que este método é de fácil visualização, principalmente no que se refere a identificação do domínio e o contradomínio, e, a introdução formal do conceito de função. Foi possível observar que os alunos compreenderam com facilidade o conteúdo apresentado, interagindo sempre que solicitado pelos acadêmicos. Porém, quando apresentados os gráficos no plano cartesiano, notou-se que os alunos tiveram dificuldade em encontrar o domínio e o contradomínio, além da dificuldade em decidir se a relação é função. Essas dúvidas puderam ser esclarecidas, utilizando-se exemplos no decorrer da aula.

Quando foi trabalhado o gráfico de funções no plano cartesiano, os acadêmicos optaram por utilizar, como um dos exemplos, uma função por partes e um debate iniciou-se quando uma aluna questionou se estavam sendo expostas duas funções. Foi explicado poderia ser considerado gráficos de duas funções em um mesmo plano cartesiano ou o gráfico de uma função expressa por uma lei de formação dividida em duas partes, ou seja, até um determinado ponto a função segue uma lei de formação, para os demais pontos segue outra lei, mas ambas as partes juntas descrevem uma única função. Observou-se que os alunos ainda ficaram com dúvidas e devido a esse fato decidiu-se, em aulas futuras, abordar questões que envolvam funções por partes.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado, pois não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: relações, introdução a função, domínio e imagem, gráfico de uma função, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, função constante e função inversa, faltando apenas o conteúdo de função composta.

Acredita-se que os alunos compreenderam e entenderam o conteúdo aplicado considerando que teve grande participação, verbalmente e por escrito no chat. Houve comentários que demonstraram o interesse e o desenvolvimento dos alunos no decorrer da aula, tais como “A Matemática nunca foi tão fácil” e “Agora eu entendi esse conteúdo”.

Durante a aula procurou-se dar ênfase em identificar se uma relação é uma função ou não e identificar se é possível classificá-la em injetora, sobrejetora ou bijetora, para isso foram utilizados diversos exemplos e contraexemplos por meio de diagramas, gráficos no plano cartesiano e da lei de formação. Por isso, os exercícios propostos nesta aula tinham como objetivo verificar se os alunos aprenderam e perceberam isto.

Pelo fato de as aulas serem remotas, os exercícios propostos em sala são feitos juntamente com os acadêmicos, não tendo um tempo exclusivo para o aluno tentar resolvê-lo. Porém, são propostos exercícios para casa por meio de uma lista, que será corrigida na aula seguinte.

É importante ressaltar que alguns dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória, atendendo as expectativas. Acredita-se que o conteúdo apresentado foi compreendido pelos alunos e espera-se que as próximas aulas ocorram do mesmo modo.

3.2 Plano de aula 2

Conteúdo: Função afim.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de função afim e suas características.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com função afim, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer funções afim.
- Compreender sua representação gráfica e sua forma algébrica.
- Distinguir coeficiente linear e coeficiente angular.
- Diferenciar funções crescentes e decrescentes.
- Compreender o conceito de raiz da função afim e como encontrá-la.
- Perceber que a função afim admite inversa.
- Determinar a inversa da função afim.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi Meet, Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

No primeiro momento, os alunos serão convidados a resolver o seguinte exercício:

Exercício 01: (UNIOESTE - 2016) Uma determinada gráfica calcula que o custo para se produzir um livro é R$0,02 por página de impressão, mais R$12,00 para que se produza a capa e se faça a encadernação. Com base nessas informações, é correto afirmar que o custo c(x), em reais, para se produzir um livro com x páginas é de:

a)$\boldsymbol{c(x) = 0,02x + 12.}$

b)$\boldsymbol{c(x) = 12x + 0,02.}$

c)$\boldsymbol{c(x) = 12x + 2.}$

d)$\boldsymbol{c(x) = 2x + 12.}$

e)$\boldsymbol{c(x) = 12,02x.}$

Espera-se que os alunos consigam interpretar o problema e encontrem a solução.

Resolução:

Tem-se que o custo por páginas é R$0,02, como são x páginas, o custo para produzir todas as páginas é R$0,02x. Soma-se a este custo o valor gasto para produzir a capa e a encadernação. Assim, o custo para produzir o livro é de $\boldsymbol{c(x) = 0,02x + 12.}$

Após comentar sobre a resolução do problema acima, os alunos serão indagados sobre a letra b) do seguinte exercício:

Exercício 02: (UNIOESTE 2020 - Adaptado) - Seja a um número real arbitrário. Suponha que f: IR → IR é uma função que satisfaz

$$\boldsymbol{f(k+x)=f(k)+xa}$$

para quaisquer x ∈ IR e K ∈ IR. Então é correto afirmar que:

a)f é obrigatoriamente injetora.

b)Se a ≠ 0, então f é uma função da forma $\boldsymbol{f(x)=mx+n}$.

c)f é obrigatoriamente crescente.

d)f possui duas raízes reais nos pontos em que x = a e x = k.

e)f é uma função da forma f(x)=ax²+mx+n, para algum m, n ∈ IR.

Acredita-se que os alunos terão dificuldade na resolução deste exercício, assim, antes da resolução será definido o conceito de função afim da seguinte forma.

Uma aplicação de IR em IR recebe o nome de função afim quando a cada x ∈ IR estiver associado o elemento (ax + b) ∈ IR e a ≠ 0, isto é:

f:IR→IR

x ↦ $ax+b$, a ≠ 0

Em seguida serão dados os seguintes exemplos de funções afim,

f(x) = x – 2

f(x) = 4x + 5

f(x) = - 3x +0

Por fim, será retomado o exercício 02 para que ele seja resolvido.

Resolução do exercício 02:

b) Precisa-se mostrar que $\boldsymbol{f(x)=mx+n}$, com m e n em IR.

$\boldsymbol{f(x)=f(0+x)=f(0)+xa=\ ax+\ f(0)}$,como f(0) é um número real pois o contradomínio da função é de IR e "a" é real, tem-se uma função do tipo f(x)=mx+n.

Espera-se que neste momento os alunos sejam capazes de relacionar a definição de função afim, conforme visto no exercício, com o que se é pedido no enunciado. Além de conseguirem realizar a manipulação necessária para resolver o exercício.

Na sequência os alunos serão convidados a resolverem o exercício abaixo:

Exercício 03: (UNIOESTE - 2018) Duas retas $y = ax$ e $y = bx + c$, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto (3,2). Sabe-se ainda que b = -3 a. Assim, é CORRETO afirmar que as equações das retas são:

$\boldsymbol{a) \; y = \frac{2}{3}x \; e \; y = -2x + 8.}$

$\boldsymbol{b) \; y = \frac{3}{2}x \; e \; y = -3x + 2.}$

$\boldsymbol{c) \; y = \frac{2}{3}x \; e \; y = -3x + 2.}$

$\boldsymbol{d) \; y = -x \; e \; y = 3x - 3.}$

e) $\boldsymbol{y = 3x \; e \; y = -9x + 2.}$

Espera-se que os alunos consigam chegar na seguinte ***resolução:***

Como o ponto (3,2) pertence a reta de equação $y = ax$ tem-se $2 = a.3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

Como $b = -3a \Rightarrow b = \frac{-3.2}{3} = -2$

Como o ponto (3,2) pertence a reta de equação $y = bx + c = -2x + c$ tem-se 2 = (-2)3+c ⇒ 2 = -6+c ⇒ c=8.

Então uma reta tem equação $y = \frac{2x}{3}$ e a outra $y = -2x + 8$

Utilizando os dados do exercício anterior será utilizado o software geogebra para apresentar os gráficos das duas retas, demostrar que de fato estas retas se encontram no ponto (3,2).

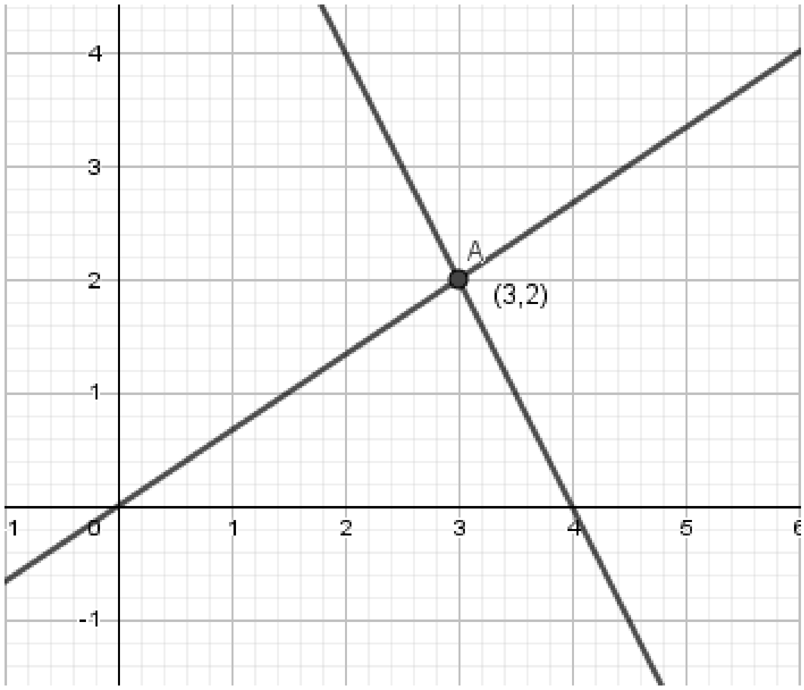


Figura 28: Gráfico de intersecção entre duas funções.

Fonte: Acervo dos autores.

No segundo momento, ainda utilizando o software geogebra, serão abordadas as características do gráfico da função afim, para isso será utilizada como auxílio a ferramenta “controle deslizante”, objetiva-se mostrar como a alteração dos coeficientes interfere em algumas características do gráfico.

- O gráfico de uma função afim é sempre uma reta;
- Quando a = 0, tem-se uma função constante f(x) = b e o gráfico é uma reta paralela ao eixo x;
- Reta paralela ao eixo y – gráfico de uma relação que não é função;
- Se b=0, a reta passa pela origem.

Além disso, serão definidos, como coeficiente angular (a) e coeficiente linear (b) da forma,

O termo constante, a, é chamado de coeficiente angular. É a medida que caracteriza a inclinação da reta (gráfico da equação) em relação ao eixo das abscissas. Quando o coeficiente angular é positivo a função é crescente, quando o coeficiente angular é negativo a função é decrescente.

O termo constante, b, é chamado coeficiente linear da reta. Para x = 0, temos y = a · 0 + b = b. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico da equação com o eixo y.

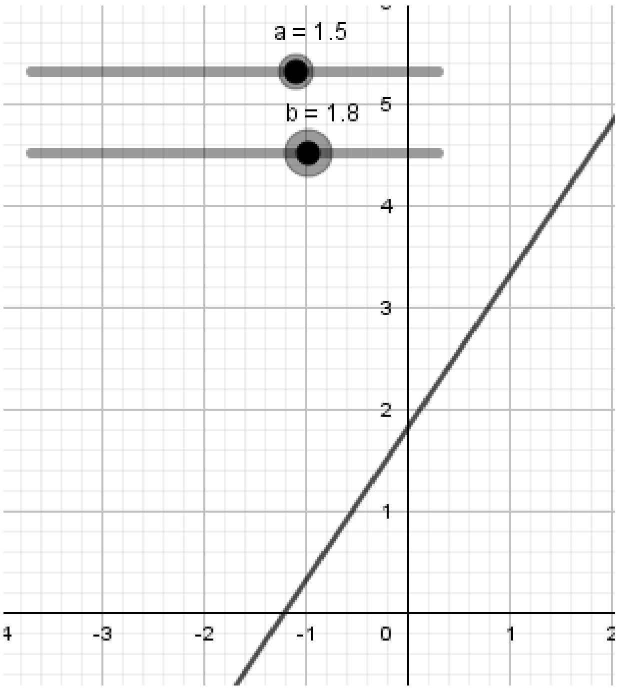


Figura 29: Gráfico controle deslizante.

Fonte: Acervo dos autores.

Dando sequência à explicação, será utilizada a imagem abaixo para demonstrar que o coeficiente angular é igual ao valor da tangente do ângulo que o gráfico da função afim faz com o eixo x. Este ângulo chama-se α, logo $a = Tg(\alpha)$, tal relação é originada de relações trigonométricas. Espera-se que os alunos consigam entender o conceito sem muitas dificuldades.

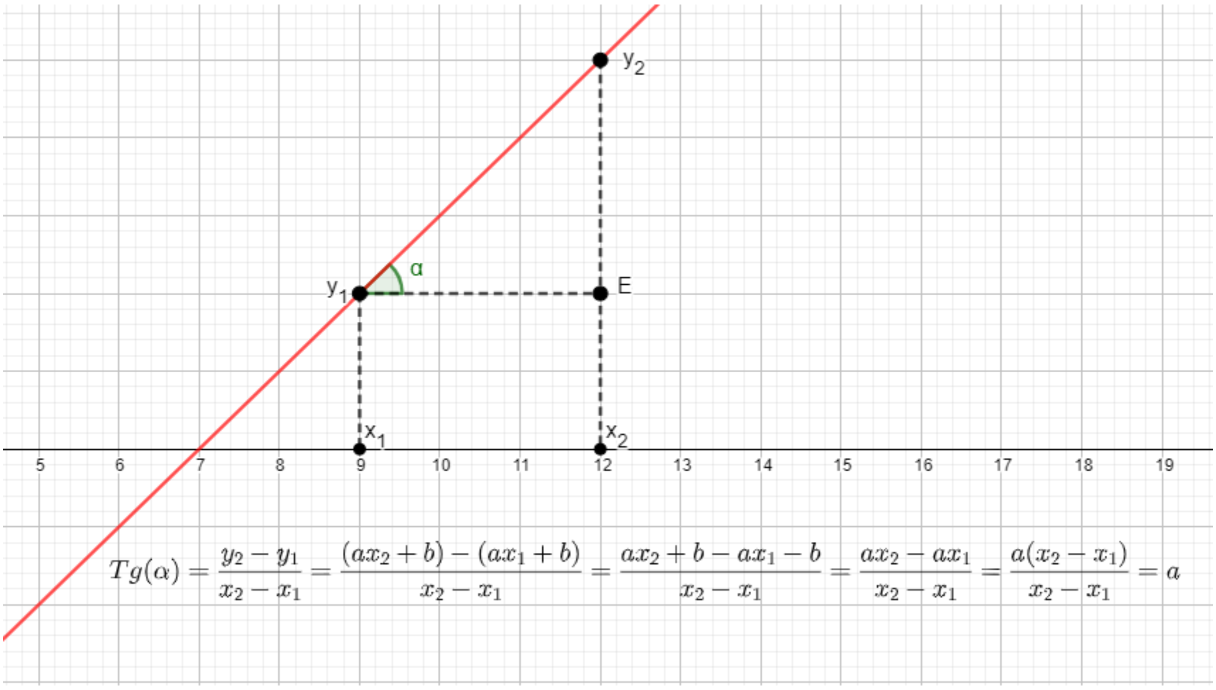


Figura 30: Dedução do coeficiente linear.

Fonte: Acervo dos autores.

Em seguida os alunos serão instigados a resolverem o item c) do exercício 02, que vem sendo explorado desde a aula I.

Acredita-se que os alunos apresentem dúvidas em relação à resolução do exercício, assim, serão definidos, formalmente, os conceitos de funções afim crescentes e decrescentes como:

Uma função f é crescente quando, para dois elementos x_0 e x_1 quaisquer, tais $x_0 < x_1$ tem-se que $f(x_0)<f(x_1)$. De forma semelhante, tem-se que uma função é decrescente quando, para dois elementos x_0 e x_1 quaisquer, tais que $x_0 < x_1$ temos que $f(x_0)>f(x_1)$

A seguir, serão usadas imagens para fixar funções crescentes e decrescentes. Em cada figura, será observado a reta da função. Espera-se que com os questionamentos os alunos sejam capazes de caracterizar os tipos de função afim do seguinte modo:

Será chamada atenção dos alunos que ao realizar a análise de dois elementos e suas respectivas imagens, tem-se outra forma de perceber se uma função é crescente ou decrescente, além de analisar o coeficiente angular. Será formalizado nos slides que quando o "a" é maior que zero será sempre crescente e com coeficiente angular menor que zero será decrescente. Espere-se que os alunos consigam entender o conteúdo e o relacionem com os gráficos vistos em momentos anteriores.

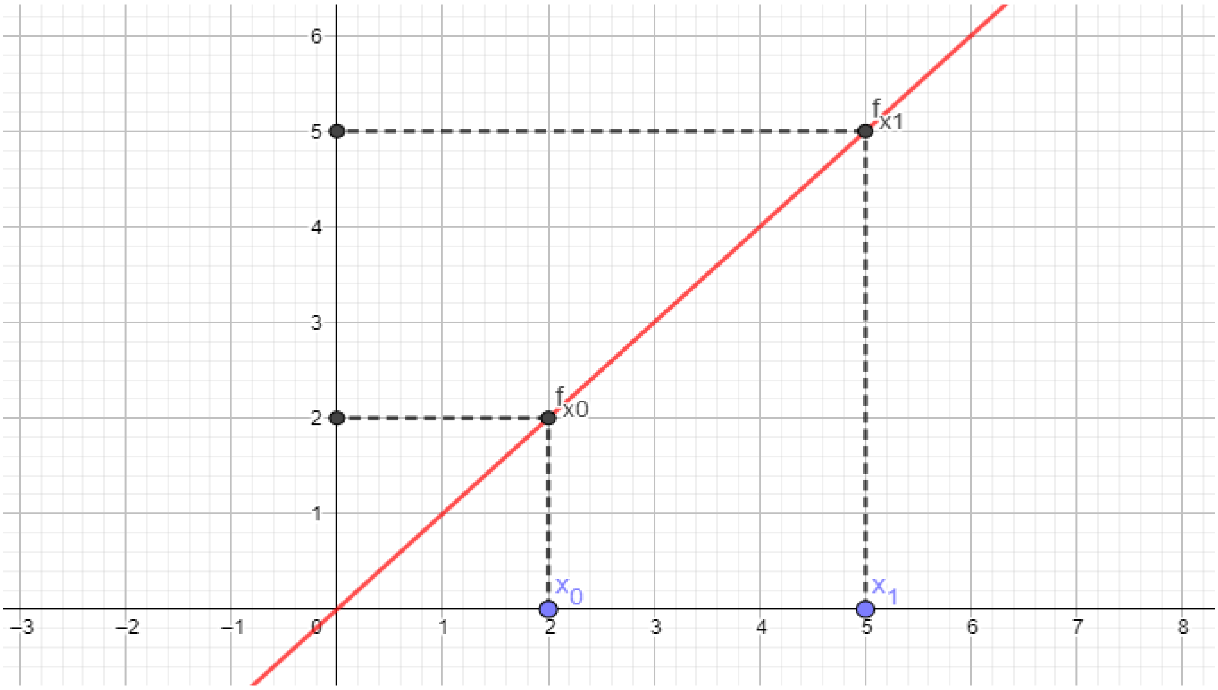


Figura 31: Função afim crescente.

Fonte: Acervo dos autores.

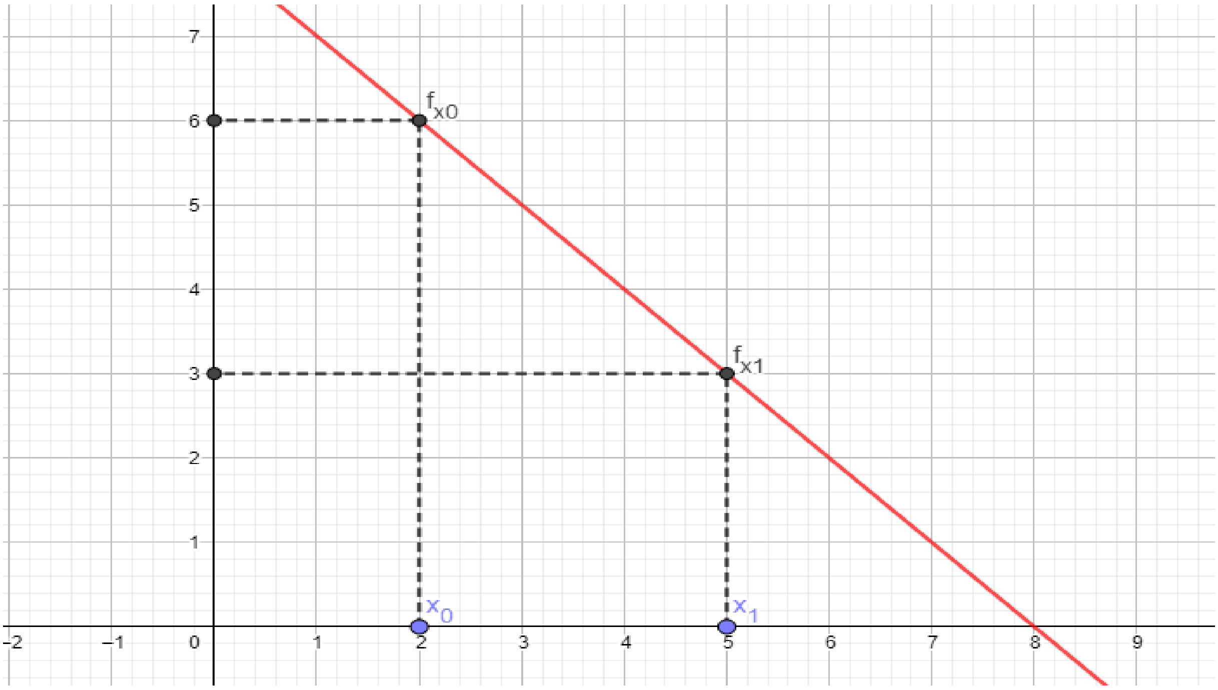


Figura 32: Função afim decrescente.

Fonte: Acervo dos autores.

Por fim, retoma-se o exercício 02, demonstrando a resolução da alternativa c.

Espera-se que após a formalização dos conceitos de função afim crescente e decrescente os alunos consigam perceber que é necessário saber o valor de “a”, pois dependendo do seu sinal, a função será crescente ou decrescente.

Resolução:

c) f não é obrigatoriamente crescente pois uma função afim só é crescente quando o coeficiente angular “a” é positivo e como o “a” pode ser qualquer número real, isso não é verdade.

Em seguida os alunos serão convidados a resolver o exercício abaixo,

Exercício 04: (UNIOESTE - 2014) - Uma loja de roupas dá a seus clientes um desconto de 10% para compras acima de R$100,00. O desconto incide somente sobre o valor que ultrapassa R$100,00. Por exemplo, por uma compra de R$110,00 o valor pago será R$109,00. Se f(x) representa o valor que deve ser pago em uma compra (após receber o desconto), em função do valor da compra, x, então é CORRETO afirmar que:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 0,9x - 100, & x > 100 \end{cases}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 0,9(x - 100) - 100, & x > 100 \end{cases}}$

c) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 0,9(x - 100) + 100, & x > 100 \end{cases}}$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 0,9(x - 100), & x > 100 \end{cases}}$

e) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0,9x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 0,9x + 100, & x > 100 \end{cases}}$

Acredita-se que os alunos possuam dúvidas em como montar a lei de formação, pretende-se discutir cada item do exercício para que as dúvidas sejam sanadas.

Resolução:

a)f(x) não representa o comportamento real do desconto, pois, para x>100, há um intervalo onde o valor pago é negativo.

b)f(x) não representa o comportamento real do desconto, pois, para x>100, há um intervalo onde o valor pago é negativo.

c)f(x) representa corretamente o comportamento do desconto. Se o cliente gastar entre R$0 e e R$100,00, não é aplicado descontos, satisfazendo a primeira parte da função. Se o valor ultrapassar os R$100,00 é aplicado o desconto de 10% apenas para o valor que ultrapassa os R$100,00. Considerando que o desconto é de 10%, o cliente pagará 90% do valor ultrapassado mais os R$ 100,00 que não é aplicado o desconto, portanto $\mathbf{0,9 \cdot (x - 100) + 100}$ ***onde x-100 representa o valor da compra que ultrapassa os R$ 100,00, satisfazendo a segunda parte da função.***

d)f(x) não representa o comportamento real do desconto, pois, para x>100, o valor dado representa apenas o desconto obtido.

e)f(x) não representa o comportamento real do desconto, pois, para x>100, o valor do desconto é calculado sobre todo o valor total do produto.

No terceiro momento, será introduzido e definido o conceito de raiz de uma função afim.

Seja f uma função afim definida de IR em IR, chamamos de zero da função f, ou raiz da função f o número real x tal que f(x)=0, ou seja todo número x, cuja imagem é nula, é raiz.

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação de 1° grau, $ax + b = 0$, que apresenta solução única $x = \frac{-b}{a}$ (a ≠ 0)

Graficamente, encontrar o zero da função é encontrar o ponto em que a função intercepta o eixo das abcissas.

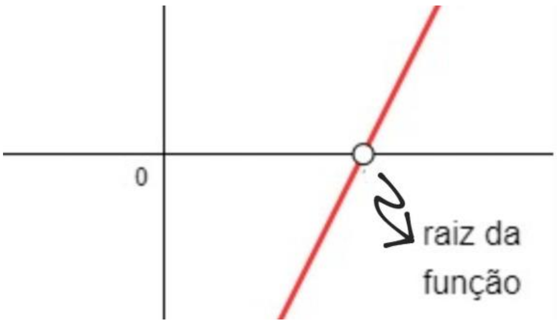


Figura 33: Raiz da função afim.

Fonte: Acervo dos autores.

Para avaliar o entendimento dos alunos sobre este tema, será requisitado que eles encontrem a raiz das seguintes funções:

$a)\ f(x) = 49x - 12$

$b)\ g(x) = \frac{-3}{2}\ x + 20$

Espera-se que os alunos encontrem facilmente as raízes, que são respectivamente: $\frac{12}{49}\ e\ \frac{40}{3}$

Em seguida, os alunos serão indagados sobre a letra d) do exercício 02:

Resolução:

Será apresentada a solução e a discutida com os alunos.

Para a ser raiz da função é necessário que f(a) = 0.

$\boldsymbol{f(a) = f(0 + a) = f(0) + a}^2$

$\boldsymbol{f(a) = f(a + 0) = f(a) + 0a = f(a)}$

Não existe garantia que f(a)=0,

Analogamente para que k seja raiz, f(k) deve ser 0.

$\boldsymbol{f(k + 0) = f(k) + 0k = f(k)}$

$\boldsymbol{f(0 + k) = f(0) + ak}$

Portanto, não é garantia que f(0)=0 e nem que k=0 ou a=0, não podendo afirmar que a e k são raízes da equação.

Por fim, no quarto momento, será realizado uma discussão sobre a existência da inversa de uma função afim:

Dada uma função f: A -> B. Denotamos por f^{-1} a inversa da função f. f^{-1}:B -> A, é a função que desfaz o que a função f fez. O domínio de f^{-1} é o contradomínio da função f. O contradomínio de f^{-1} é o domínio da função f.

Uma característica da função inversa é que:$f^{-1}(f(x)) = x$, assim como $f(f^{-1}(x)) = x$.

Como toda função afim é bijetora, temos que toda função afim possui função inversa. Para obtermos a função inversa seguimos os passos abaixo:

1) Na equação y = ax + b, isola-se o x, isto é, ax = y – b e, portanto, $x = \frac{(y - b)}{a}$.

2) Normalmente, para escrever na forma mais usual, troquemos y por x e escrevemos $y = \frac{(x - b)}{a}$, ou ainda $f^{-1}(x) = \frac{(x - b)}{a}$.

Em seguida será feito o exemplo a seguir,

Exemplo 01: Encontre a inversa da função abaixo:

y = 3x + 9

Resolução:

Subtraindo-se 9 de ambos os lados da equação tem-se y - 9 = 3x,

Por fim, dividindo-se ambos os lados da equação por 3, obtém-se $\boldsymbol{x = \frac{(y - 9)}{3}}$**.**

Assim, $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{(x - 9)}{3}}$

Espera-se que os alunos, até esse ponto, tenham compreendido o conceito de função inversa. Será feito o gráfico, no software geogebra, das funções f(x) = 2x + 1 e $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, nesse momento será mostrado que o gráfico da função inversa é simétrico, em relação a reta x=y, ao gráfico da função f e será frisado que tal comportamento ocorre com qualquer função afim. Espera-se que os alunos compreendam tais propriedades sem muita dificuldade.

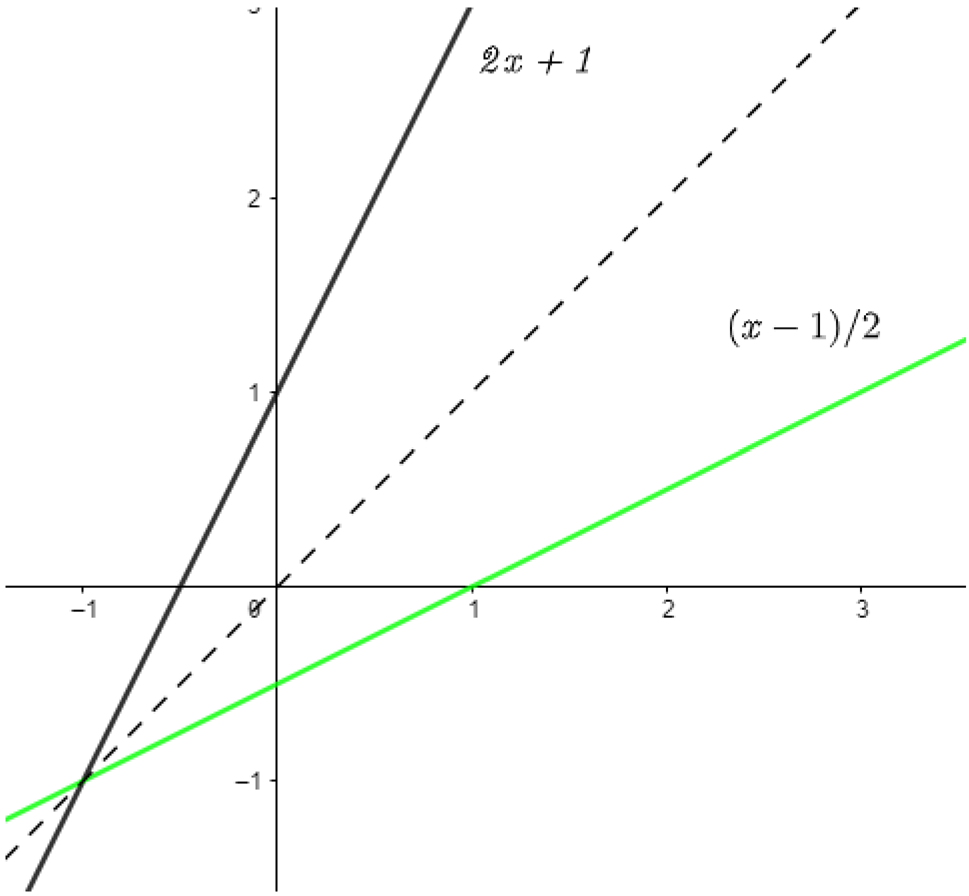


Figura 34: Simetria entre função e função inversa.

Fonte: Acervo dos autores.

No último momento da aula, para sintetizar os conteúdos apresentados na aula, os alunos serão convidados a resolver o seguinte exercício,

Exercício 05: (UNIOESTE - 2014) Suponha que f é uma função injetora cujo domínio é o intervalo [a,b] ⊂ R. Definida a função g, com domínio IR, por $\boldsymbol{g(t) = t.f(a) + (1 - t).f(b)}$. Nestas condições, podemos sempre afirmar que:

a) as raízes da função g são f(a) e f(b).

b) a única raiz da função g é o número complexo a+bi.

c) a função g tem exatamente duas raízes reais.

d) a função g possui as mesmas raízes que a função f.

e) a função g possui uma única raiz real.

Espera-se que os alunos sejam capazes de relacionar todo o conteúdo visto na aula e que consigam resolver o exercício sem muitas dúvidas

Resolução:

Para encontrar as raízes de g, tem-se que g(t)=0, assim:

$$\boldsymbol{f(a).t + (1-t).f(b) = 0}$$

$$\boldsymbol{f(a).t + f(b) - f(b).t = 0}$$

$$\boldsymbol{t[f(a) - f(b)] = -f(b)}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{[f(b)]}{[f(a) - f(b)]}}$$

Assim, g possui uma única raiz, sendo ela real, pois, por f ser injetora, f(a)≠f(b).

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos.

3.2.1 Relatório Aula 2

No dia treze de março de 2021, às 09 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado I, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula continuando o conteúdo iniciado na aula passada: Relações e Funções.

A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando a plataforma jitsi meet. Observou-se que houve um número grande de alunos ausentes nesta aula, tendo em sala apenas 18 alunos, uma grande diferença se comparados com os da aula passada.

Os acadêmicos optaram por ministrar uma aula mais dinâmica, com o intuito de obter uma afinidade maior com os participantes. Para isso, foram utilizados softwares como:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;
- Geogebra que permitiu trabalhar com gráficos de maneira dinâmica.

A aula foi iniciada com o conteúdo de relação inversa e função composta. No decorrer da aula ocorreram poucas participações, ao todo quatro a cinco alunos participaram por voz ou por chat. Acredita-se que por ter sido uma aula mais teórica com bastantes definições os alunos estavam mais focados em compreender o conteúdo.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado com algumas ressalvas, pois não foi possível abordar todo o conteúdo programado, principalmente pela má distribuição do tempo no conteúdo inicial, e diante disso se acumulou conteúdo para a aula 03. Porém fora isso, não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: relação inversa, função inversa, função composta, função afim, gráfico de uma função afim, classificação de uma função afim em crescente e decrescente, raiz de uma função afim. O conteúdo referente à inversa de uma função afim foram adequados para serem trabalhados na aula seguinte e o conteúdo raiz de uma função afim será retomado por ter sido apresentado nos instantes finais da aula comprometendo sua compreensão e espaço para dúvidas.

Durante a aula procurou-se dar ênfase em identificar o comportamento de uma função afim, além de classificá-la em crescente e decrescente. Além disso, durante uma boa parte da aula foi retomado os conteúdos da aula 1 para que o conceito de inversa de uma função ficasse bem claro para os alunos. Os exercícios propostos nesta aula tinham como objetivo verificar se os alunos compreenderam os conceitos de função inversa, se eles são capazes de identificar e classificar uma função afim em crescente e decrescente, através do coeficiente angular, além de esboçar o gráfico, identificar os coeficientes lineares e angulares, assim como suas relações com o gráfico da função, e determinar a raiz da função afim.

Pelo fato de as aulas serem remotas, os exercícios propostos em sala são feitos juntamente com os acadêmicos, não tendo um tempo exclusivo para o aluno tentar resolvê-lo. Porém, são propostos exercícios para casa por meio de uma lista, que será corrigida na aula seguinte.

É importante ressaltar que alguns dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Conclui-se que a aula poderia ter sido aplicada de forma mais dinâmica, de forma a incentivar a participação dos alunos, esses detalhes estarão em mente para melhorar as próximas aulas.

3.3 Plano de aula 3

Conteúdo: Função quadrática

Objetivo geral: Introduzir a ideia de funções quadráticas e suas características.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com funções quadráticas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer uma função quadrática.
- Compreender sua representação gráfica e sua forma algébrica.
- Reconhecer o seu Domínio e Imagem.
- Analisar uma função quadrática e determinar a sua concavidade a partir do seu coeficiente dominante.
- Compreender o conceito de raízes de uma função quadrática.
- Compreender diferentes métodos para encontrar as raízes.
- Compreender os conceitos de Máximo e Mínimo.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Mentimeter, Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

No primeiro momento, os alunos serão convidados a resolver o item “e” do exercício abaixo.

Exercício 01: (UNIOESTE 2020 - Adaptado) Seja a um número real arbitrário. Suponha que f: IR → IR é uma função que satisfaz

$$\boldsymbol{f(k+x) = f(k) + xa}$$

para quaisquer x ∈ IR e K ∈ IR. Então é correto afirmar que:

a)f é obrigatoriamente injetora?

b)Se a ≠ 0, então f é uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$?

c)f é obrigatoriamente crescente?

d)f possui duas raízes reais nos pontos em que x = a e x = k.

e)f é uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + mx + n}$, para algum m,n ∈ IR?

Espera-se que os alunos percebam que há diferença entre a função apresentada na alternativa “e” e as funções trabalhadas até então. Em decorrência, será definido o conceito de função quadrática,

Uma função f: IR→IR recebe o nome de função quadrática ou função do 2° grau quando associa a cada x ∈ IR o elemento ax^2+bx+c ∈ IR, a, b, c ∈ IR, a ≠ 0. Isto é:

$$f: IR \to IR$$
$$x \to ax^2+bx+c$$

Na sequência, será dado um exemplo de função quadrática, onde os alunos serão convidados a identificar seus coeficientes.

Exemplo:

$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$,

Em que,

a = 2, b = 3, c = 5

Espera-se que os alunos compreendam o conteúdo sem muitas dúvidas. Na sequência será retomado e resolvido a letra e) do exercício 01:

Resolução:

e) A alternativa "e" está incorreta. Uma função não pode ser afim e quadrática ao mesmo tempo. Além disso, na função quadrática precisa-se ter um termo quadrático.

Em seguida, será trabalhado o gráfico da função quadrática no software geogebra, utilizando como auxílio a ferramenta "controle deslizante", objetiva-se mostrar como a alteração dos coeficientes interfere em algumas características do gráfico. Dentre elas, será mostrado que a função sempre será uma parábola para qualquer valor de a ≠ 0 e que o coeficiente c, o termo independente, sempre será a intersecção da parábola com o eixo y.

Será mostrado que o coeficiente "a" interfere na concavidade da parábola e ainda, a influência do coeficiente b não é tão direta como as influências dos demais coeficientes.

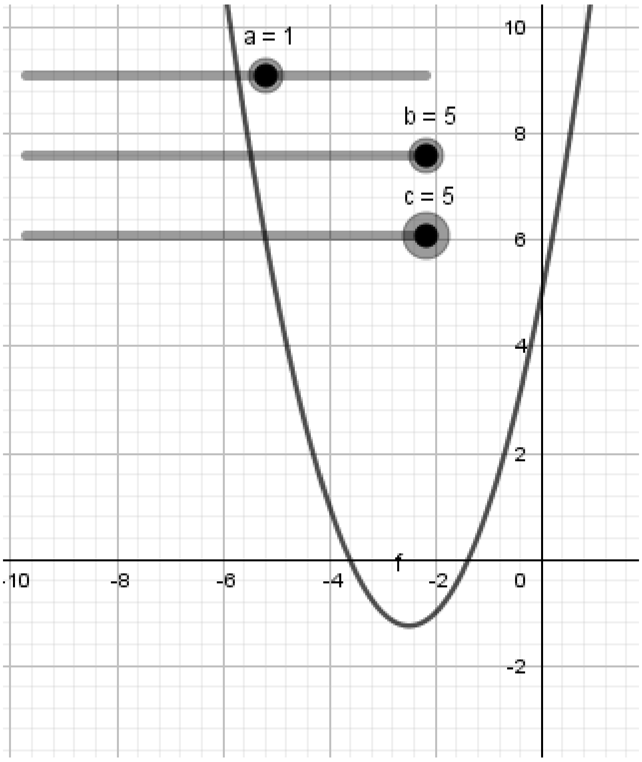


Figura 35:Controle deslizante função quadrática com a>0.

Fonte: Acervo dos autores.

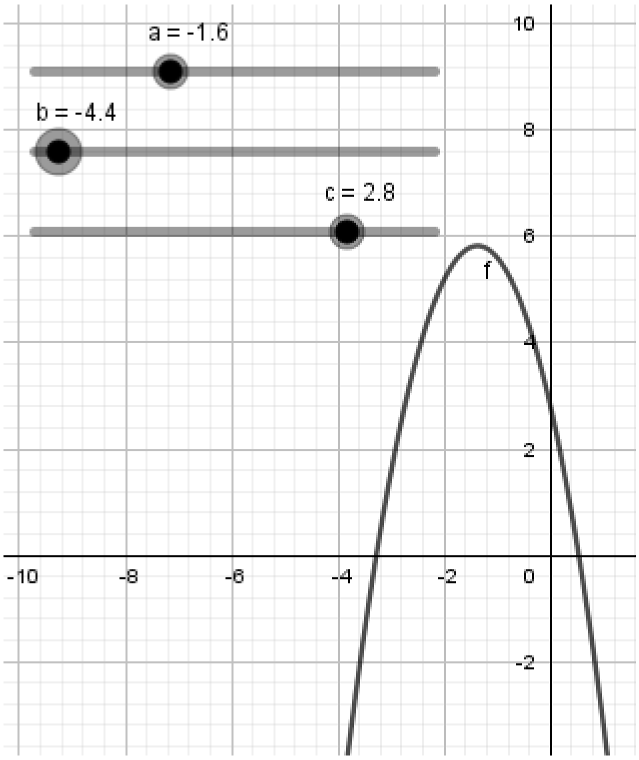


Figura 36: Controle deslizante função quadrática com a<0.

Fonte: Acervo dos autores.

Com isso, será formalizado as mudanças realizadas no gráfico da função quadrática quando se altera o valor de $a \neq 0$:

Se a > 0, a concavidade da parábola está voltada para cima.
Se a < 0, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

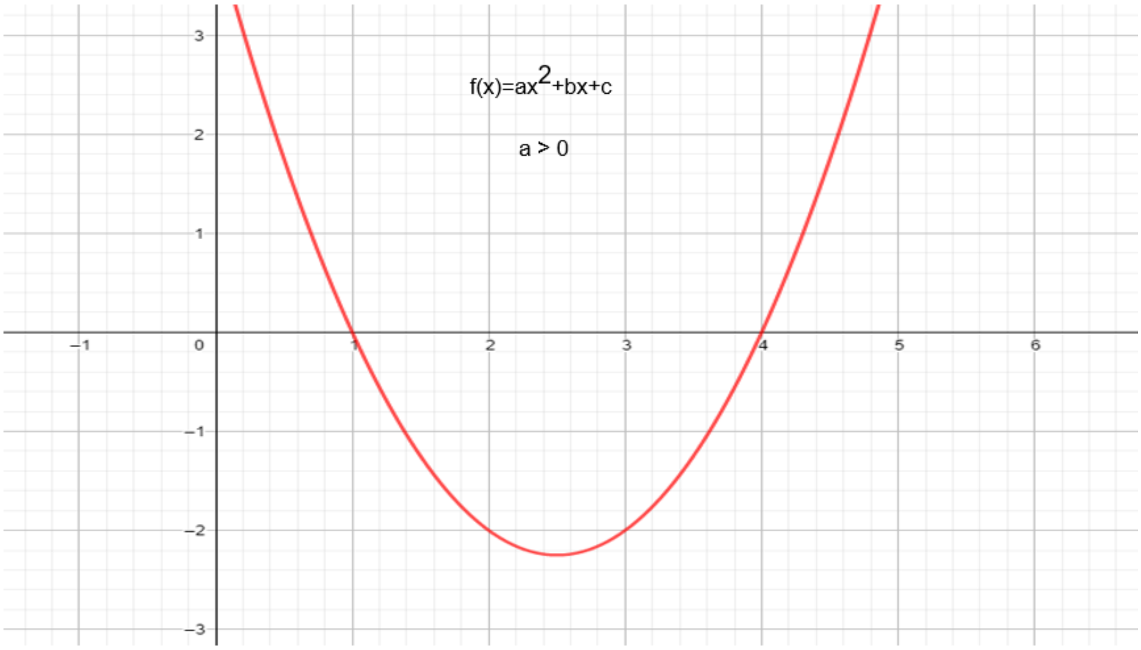


Figura 37: Gráfico de uma função quadrática com a>0.

Fonte: Acervo dos autores.

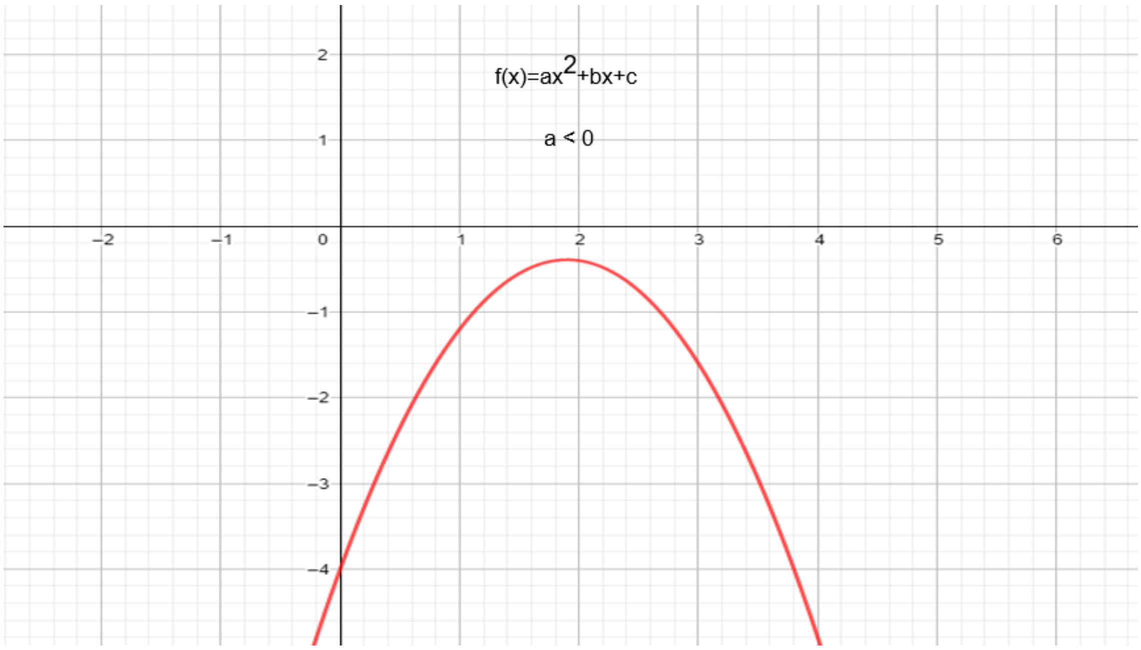


Figura 38: Gráfico de uma função quadrática com a<0.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos compreendam o conteúdo e tenham capacidade de identificar as características da função quadrática.

Dando continuidade à aula, será resolvido o exercício abaixo, que servirá como introdução ao conceito de raiz da função quadrática.

Exercício 02: (UNIOESTE, 2016) Se (x_0, x_1) e (y_0, y_1) são os pontos onde os gráficos de $y = x^2 + 5x - 14$ e $y = 4x - 2$ se interceptam, então é CORRETO afirmar que $a = x_0 + y_0$ e $b = x_1 + y_1$ são

a) $\frac{-13}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

b)3 e 10.

c)-9 e 2.

d)3 e 4.

e)-22 e 13.

Resolução:

Os pontos de intersecção entre duas funções, são os valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas funções. Podendo ser obtidos igualando as expressões que estabelecem as leis de formação das funções, isto é, resolvendo a equação:

$$\boldsymbol{x^2 + 5x - 14 \ = \ 4x - 2 \ \Rightarrow \ x^2 + x - 12 = 0}$$

Ao chegar em uma equação quadrática, espera-se que os alunos apresentem dúvidas na continuidade do problema, assim, será comentado que, similar ao caso da função afim, será necessário encontrar os valores de x para os quais $x^2+x-12=0$, ou seja, encontrar as raízes da função(x)= x^2+x-12. Uma função quadrática possui duas raízes, sendo elas:

→ Ambas são reais e distintas.

→ Ambas são reais e iguais.

→ Ambas são raízes complexas.

Além disso, tem-se que, graficamente, as raízes da função do segundo grau são os pontos em que a parábola – a forma gráfica da função quadrática – corta o eixo x, ou o eixo das abscissas.

Na sequência, pelo whiteboard, será explicado o método de completamento de quadrados para encontrar as raízes de uma função do segundo grau, utilizando os exemplos a seguir,

01. $x^2 + x - 12 = 0$:

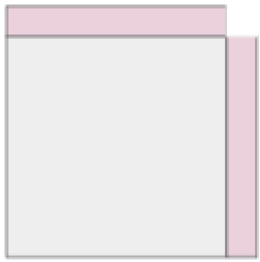


Figura 39: Exemplo 1: Completamento de quadrado.

Fonte: Acervo dos autores.

Será utilizado uma representação gráfica de x^2+x (Figura 39), observa-se que o maior quadrado, de lados com medida x, tem área x^2. Cada retângulo, de lados com medidas x (comum ao lado do quadrado) e $\frac{1}{2}$, tem área de medida $\frac{x}{2}$. Somando a área dos dois retângulos tem-se área x. É notável que falta um pequeno quadrado para que possa ter um quadrado perfeito. O quadrado que falta ser adicionado tem lado $\frac{1}{2}$ (comum com o lado do retângulo), portanto sua área é $\frac{1}{4}$. O que será somado nos dois membros dessa equação. Após realizada a soma, obtém-se um quadrado perfeito (Figura 40). Esse procedimento recebe o nome de completar quadrados.

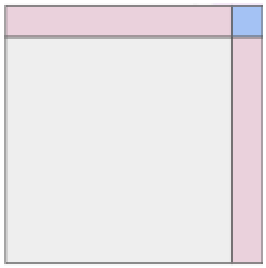


Figura 40: Quadrado completado.

Fonte: Acervo dos autores.

Ao analisar algebricamente temos que.

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4}$$

Agora pode-se escrevê-lo na forma de produto notável:

$(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{49}{4}$ e resolvendo tem-se:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad ou \; x + \frac{1}{2} = \frac{-7}{2}$$

$x = \frac{6}{2}\ ou\ x = -4$

O mesmo procedimento será repetido para uma função quadrática com apenas uma raiz pois representa um trinômio quadrado perfeito e para uma função quadrática sem raízes reais para introduzir a ideia dos números complexos.

02. x² + 6x +9 = 0:

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \equiv x^2 + 6x = -9$$

$$x^2 + 2.3x + 9 = -9 + 9$$

$$(x+3)(x+3) = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

03. 2x² + 6x +9 = 0:

$2x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 3x + \frac{9}{2}) = 0$, como 2 ≠ 0 então

$$(x^2 + 3x + \frac{9}{2}) = 0$$

$$x^2 + 3x = \frac{-9}{2}$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{-9}{2} + \frac{9}{4}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{-9}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{-9}{4}} = \pm\sqrt{(-1)(\frac{9}{4})} = \pm\sqrt{(-1)}\,.\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\pm (i).\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-3}{2} \pm (i).\frac{3}{2}$$

Espera-se que os alunos apresentem dúvidas acerca da existência de raízes negativas e da notação apresentada. Neste momento, será definido o conjunto dos números complexos:

Chama-se de número complexo, um número da forma a+bi em que a,b $\in \mathbb{R}$ e sendo $i = \sqrt{-1}$. Chama-se i de unidade imaginária.

Por fim, será explicado o método de Bhaskara por meio do completamento de quadrados:

Tomando a função $ax^2 + bx + c = 0$ e colocando o termo “a” em evidência tem-se $a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = 0$ como a≠0, então tem-se que $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, que é equivalente $ax^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

Será utilizado uma representação gráfica de $x^2 + \frac{bx}{a}$, onde observa-se que o maior quadrado tem lado x pois, sua área é x^2 e cada um dos retângulos têm lados x e $\frac{b}{2a}$, considerando que um lado é comum ao quadrado maior e o outro lado é $\frac{b}{2a}$ pois, somando a área dos dois retângulos tem-se $\frac{bx}{a}$. O quadrado que falta ser adicionado tem lado comum com o retângulo portanto sua área é $(\frac{b}{2a})^2$ e, portanto, somando nos dois membros dessa equação tem-se:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -4ac + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{-4ac + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-4ac + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x' = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a} \; ou \; x'' = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a}$$

$$Sendo \; \Delta = b^2 - 4ac$$

Acredita-se que os alunos tenham dúvidas no desenvolvimento da fórmula de bháskara, mas que consigam compreender conforme a explicação for continuada. Na sequência, será comentado acerca das influências que o Δ tem no número de raízes da função, isto é,

1) Se Δ > 0, a equação apresenta duas raízes distintas.
2) Se Δ = 0, a equação apresenta duas raízes iguais.

3) Se Δ < 0, tem-se √Δ ∉ ℝ isto é, um número complexo, então a equação não apresenta raízes reais, porém, duas raízes complexas.

Na sequência, por meio de imagens, serão mostrados os seis diferentes casos que se pode obter na função quadrática:

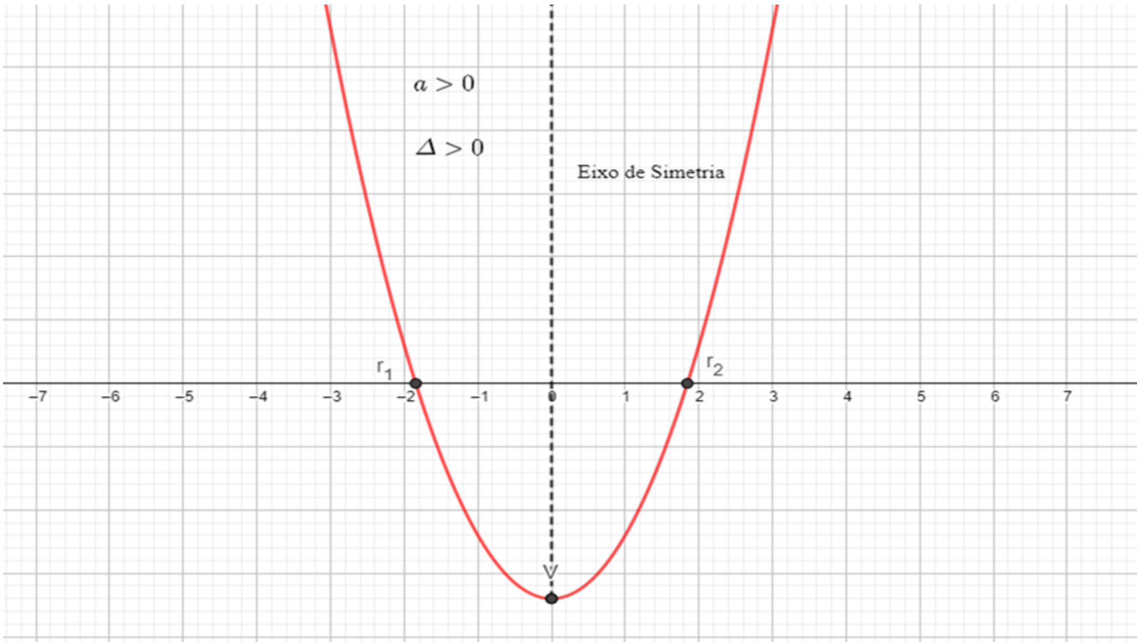


Figura 41: Gráfico de uma função quadrática com a>0 e △>0.

Fonte: Acervo dos autores.

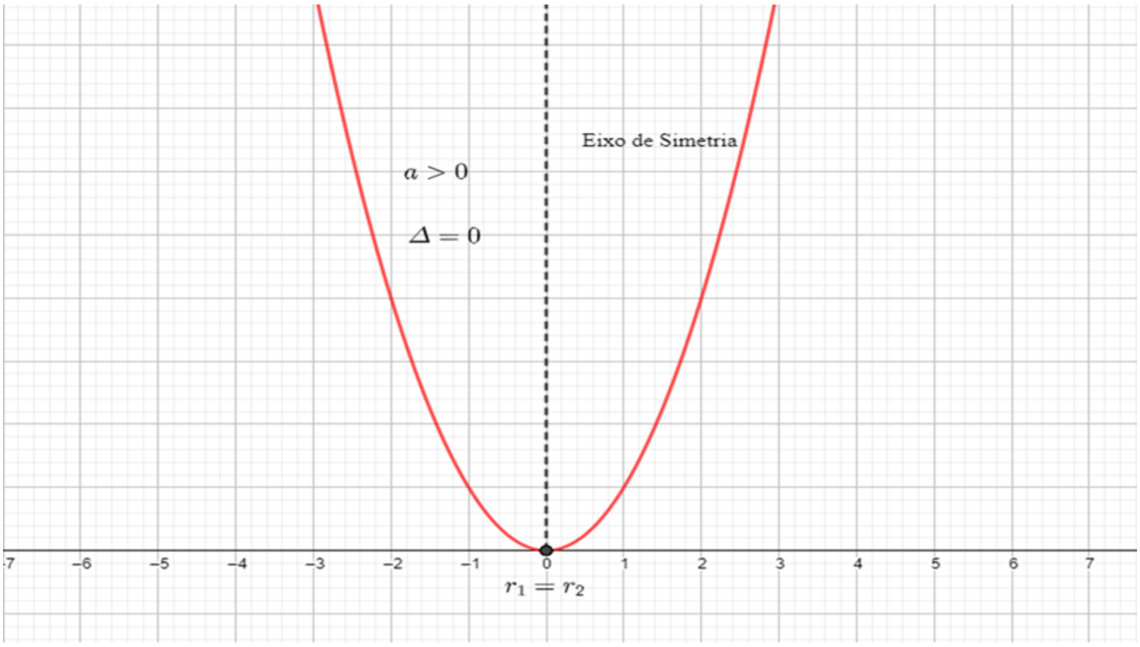


Figura 42: Gráfico de uma função quadrática com a>0 e △=0.

Fonte: Acervo dos autores.

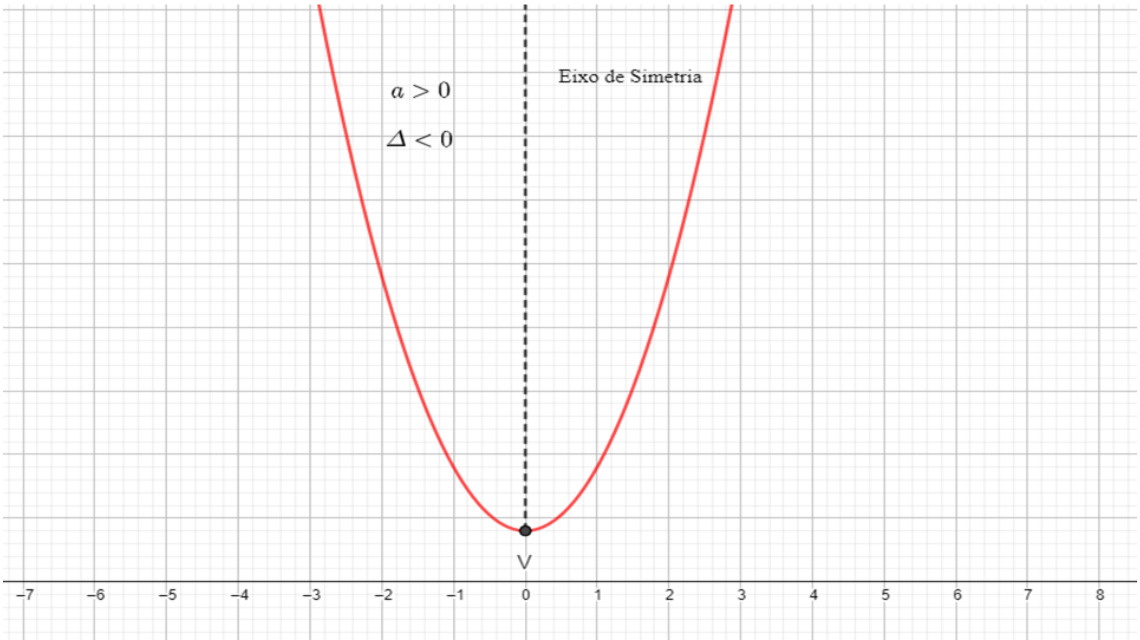


Figura 43: Gráfico de uma função quadrática com a>0 e △<0.

Fonte: Acervo dos autores.

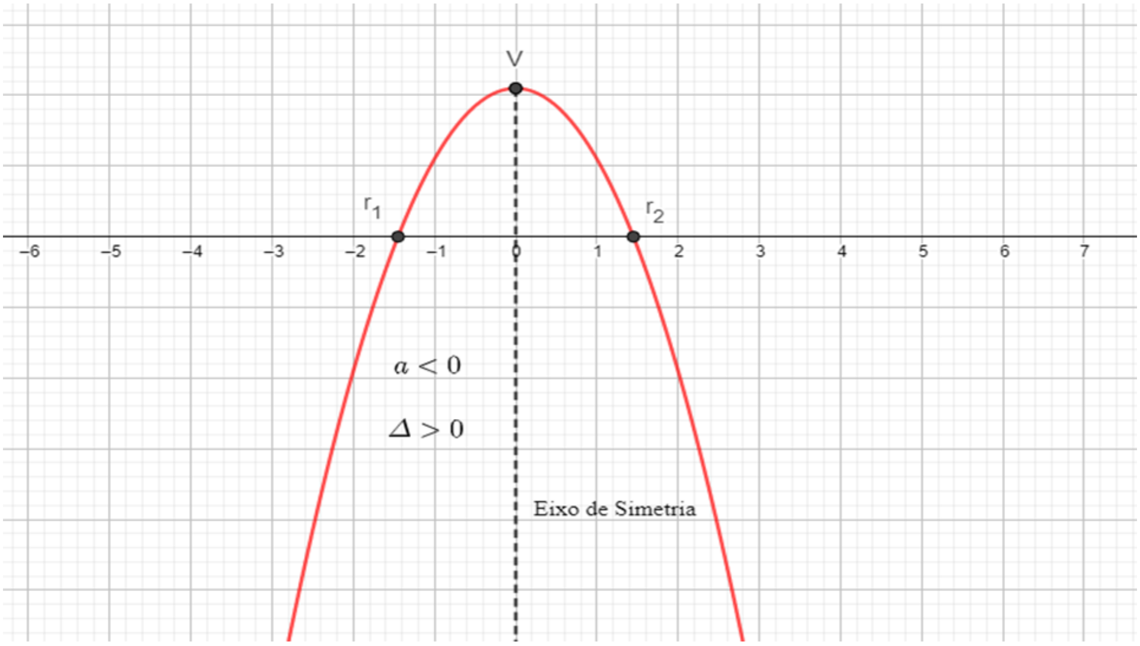


Figura 44: Gráfico de uma função quadrática com a<0 e △>0.

Fonte: Acervo dos autores.

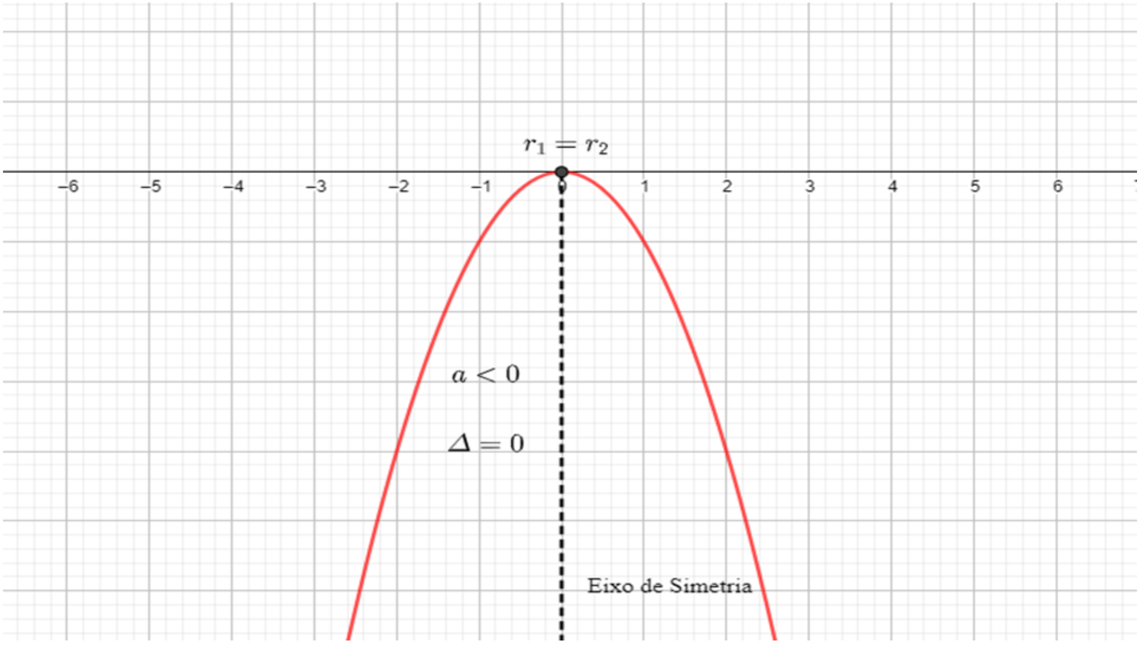


Figura 45: Gráfico de uma função quadrática com a<0 e △=0.

Fonte: Acervo dos autores.

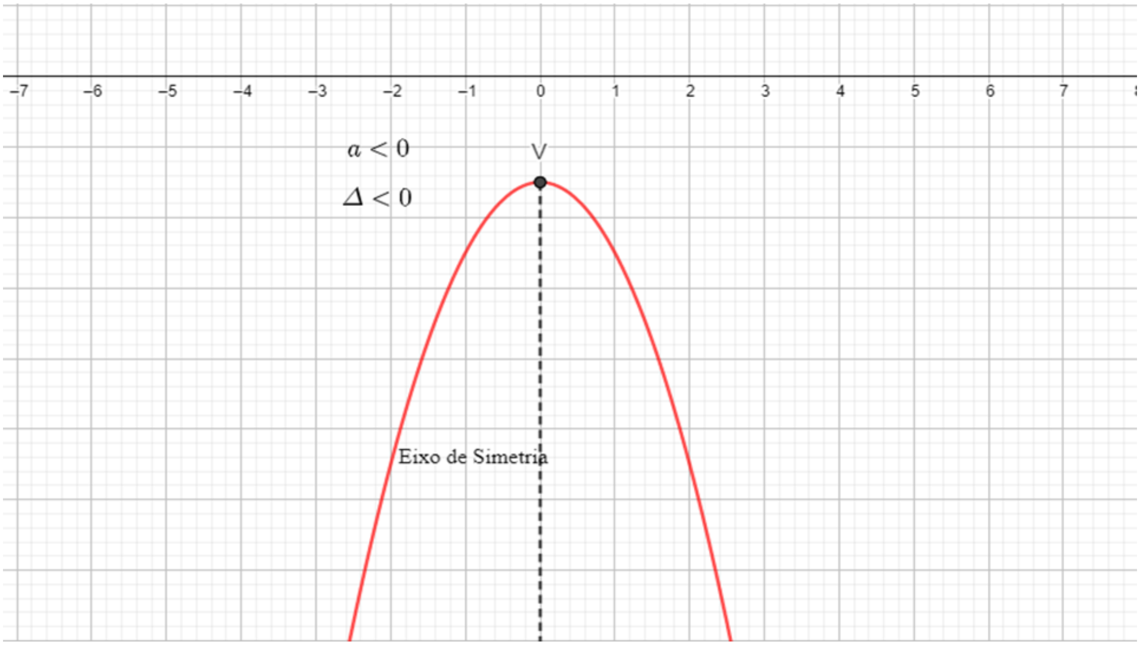


Figura 46: Gráfico de uma função quadrática com a<0 e △<0.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos compreendam os casos acima e que consigam distinguir cada uma de suas particularidades. Será voltado ao exercício 02 para terminar sua resolução e representar graficamente suas equações:

Resolução:

$$x^2 + 5x - 14 = 4x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-12)1 = 49$$

$$x_0 = \frac{(-1-7)}{2} = -4$$

$$y_0 = (-4)^2 + 5(-4) - 14 = \Rightarrow y_0 = -18$$

$$x_1 = \frac{(-1+7)}{2} = 3$$

$$y_1 = 3^2 + 5.3 - 14 \Rightarrow 10$$

$$Assim, a = -4 + (-18) = -22 \ e \ b = 3 + 10 = 13$$

Graficamente é possível analisar que os valores encontrados são os pontos A=(3,10) e B=(-4,-18), que representam as intersecções das duas funções.

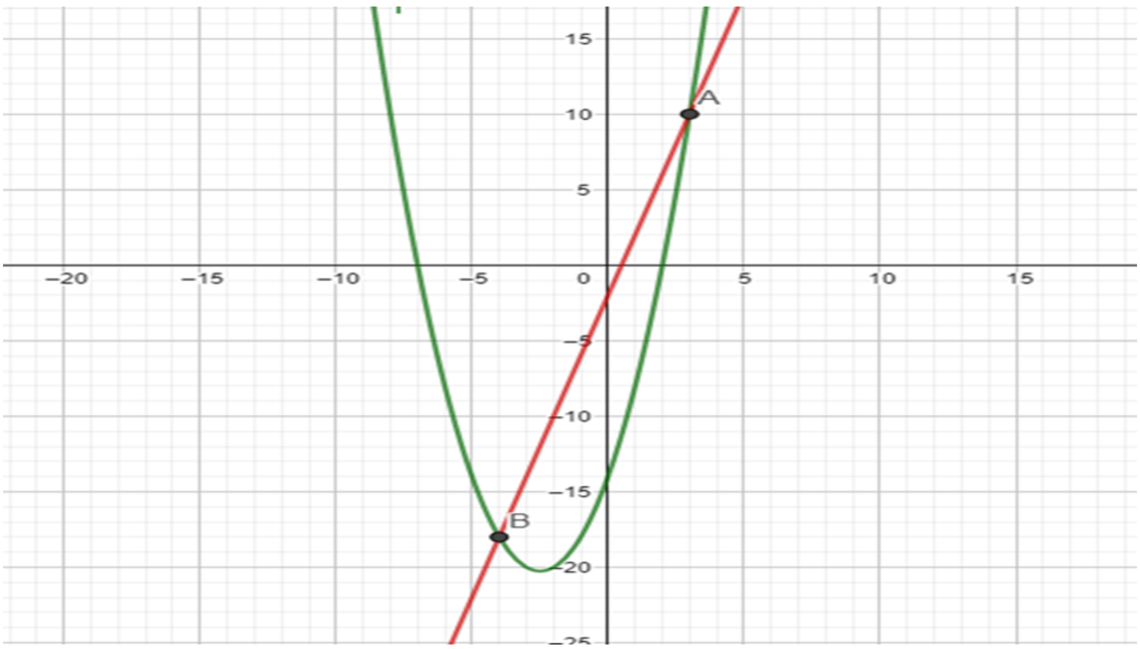


Figura 47: Intersecção entre uma função afim e uma função quadrática.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos compreendam os conteúdos apresentados e consigam resolver situações similares.

Após trabalhar com a fórmula de Bhaskara será apresentado a soma e o produto das raízes (relações de Girard),

- A soma de duas 2 raízes é igual a: $\frac{-b}{a}$,

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

- A multiplicação de 2 raízes é igual a: $\frac{c}{a}$,

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-[b^2-4.a.c]}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4.a.c}{4a^2}=\frac{4.a.c}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Após definidas as relações de Girard, será apresentado alguns exemplos com o intuito de fixar o conteúdo e sanar dúvidas.

1. **x²-7x+10**

Assim, a pergunta a ser feita é: quais são os números que somados resultam 7 e multiplicados resultam em 10?

$$\boldsymbol{r_1+r_2=-\frac{(-7)}{1}=7}$$

$$\boldsymbol{r_1\cdot r_2=\frac{10}{1}=10}$$

Então $r_1=2$ e $r_2=5$

2. **x²+6x+9**

Assim, a pergunta a ser feita é: quais são os números que somados resultam -6 e multiplicados resultam em 9?

$$\boldsymbol{r_1 + r_2 = \frac{(-6)}{1} = -6}$$

$$\boldsymbol{r_1 \cdot r_2 = \frac{9}{1} = 9}$$

Então $r_1 = -3$ e $r_2 = -3$

3. **3x²+24x+45**

Assim, a pergunta a ser feita é: quais são os números que somados resultam -8 e multiplicados resultam em 15?

$$\boldsymbol{r_1 + r_2 = \frac{(-24)}{3} = -8}$$

$$\boldsymbol{r_1 \cdot r_2 = \frac{45}{3} = 15}$$

Então $r_1 = -3$ e $r_2 = -5$

Além disso, será utilizado o conceito de raiz para comentar sobre a fatoração da função quadrática:

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com raízes r_1 e r_2, podemos escrevê-la na forma:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Caso $r_1 = r_2$, então temos que $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x - r_1)(x - r_1) = a(x - r_1)^2$

Será usado os mesmos exemplos anteriores para escrever as funções quadráticas na sua forma fatorada:

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$ com raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 5$ na forma fatorada é (x-2)(x-5)
2. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ com raízes $r_1 = -3$ e $r_2 = -3$ na forma fatorada é

(x+3)(x+3)

3. $f(x) = 3x^2 + 24x + 45$ com raízes $r_1 = -3$ e $r_2 = -5$ na forma fatorada é 3(x+3)(x+5)

Dando continuidade ao conteúdo será definido o conceito de vértice da parábola da seguinte maneira,

O ponto $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, chamado de vértice da parábola - gráfico da função do segundo grau - é o ponto de máximo absoluto ou de mínimo absoluto da função, ou seja, o maior ou o menor valor que a função pode assumir em todo o seu domínio.

- Se a concavidade for voltada para baixo, a função apresenta ponto de máximo absoluto.
- Se a concavidade for voltada para cima, a função apresenta ponto de mínimo absoluto.

Na sequência será mostrado as imagens abaixo para ilustrar os possíveis casos de ponto de mínimo ou máximo.

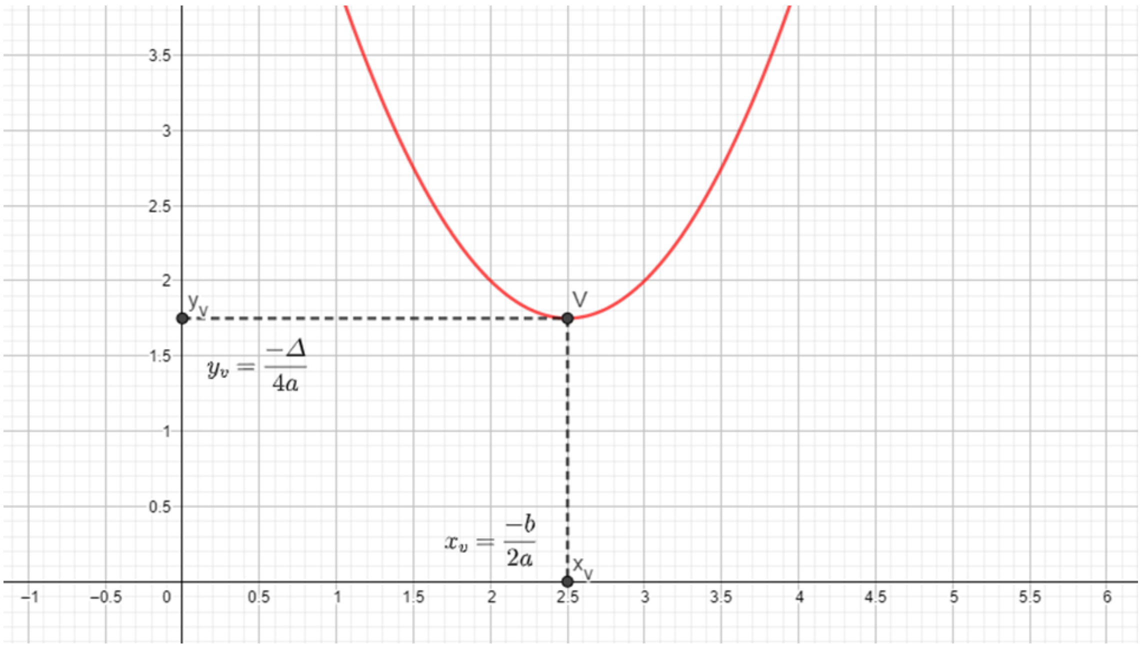


Figura 48: Vértice de uma função quadrática com a>0.

Fonte: Acervo dos autores.

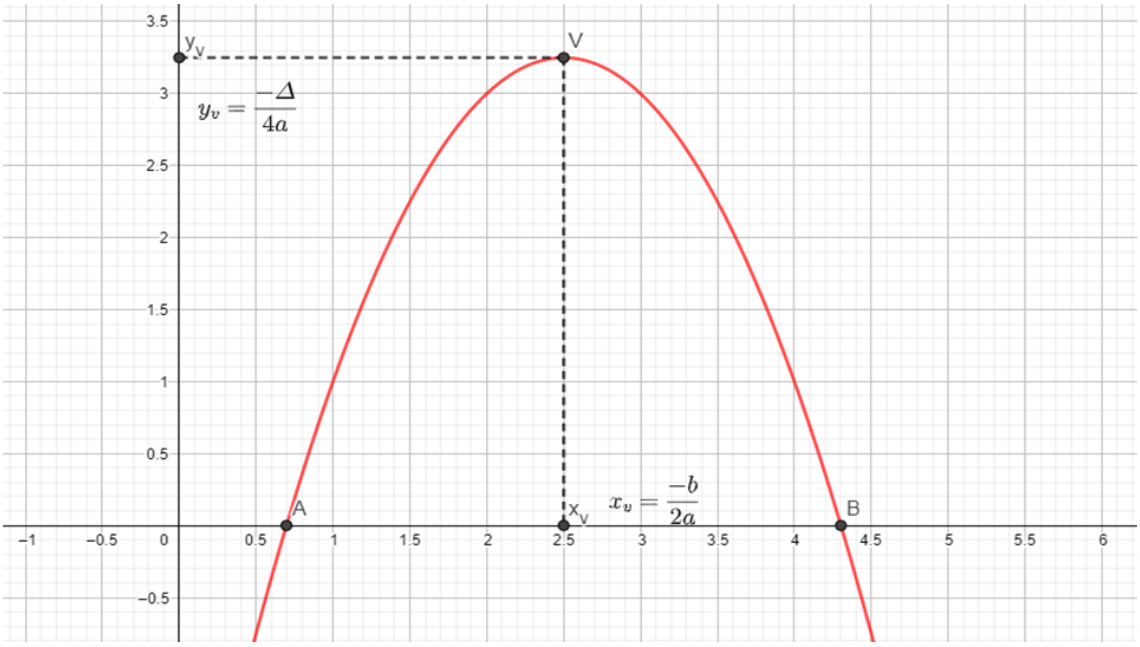


Figura 49: Vértice de uma função quadrática com a<0.

Fonte: Acervo dos autores.

Espera-se que os alunos sejam capazes de identificar se a função quadrática possui ponto de máximo ou mínimo.

Os alunos serão convidados a resolverem o exercício abaixo,

Exercício 03: (UERJ - 2016) - Observe a função definida por:

$f(x) = x^2 - 2kx + 29$**, para x ∈ R**

Se $f(x) \geq 4$, para todo número real x, o valor mínimo da função f é 4. Assim, o valor positivo do parâmetro k é:

a) 5

b) 6

c) 10

d) 15

Espera-se que os alunos consigam compreender o exercício e cheguem à resolução:

Como o coeficiente "a" da função é positivo, seu gráfico será uma parábola com a concavidade voltada para cima. Logo, o vértice da parábola será o ponto em que o valor da função é mínimo. No enunciado é informado que o

valor mínimo é igual a 4, ou seja, que o yv=4. Sendo assim, será usado a expressão do yv para calcular o valor do parâmetro k.

$$\mathbf{4 = -\frac{((-2\boldsymbol{k})^2 - 4.1.29)}{4.1}}$$

$$\mathbf{4 = -\frac{(4\boldsymbol{k}^2 - 116)}{4}}$$

$$\mathbf{16 = -4\boldsymbol{k}^2 + 116}$$

$$\mathbf{4\boldsymbol{k}^2 = 100}$$

$$\boldsymbol{k}^2 = \mathbf{\frac{100}{4}}$$

$$\boldsymbol{k} = \mathbf{\sqrt{25} = \pm\, 5}$$

Em seguida será questionado se é possível obter a função inversa da função quadrática. Acredita-se que os alunos respondam que sim e diante disso, será reforçado que para uma função possuir inversa é necessário que ela seja bijetora. Utilizando o software Geogebra, será feito o gráfico da função $f(x)=x^2$ (Figura 51) e novamente os alunos serão questionados se é possível encontrar uma função inversa da função quadrática e espera-se que a resposta seja negativa, considerando que a função quadrática não é bijetora.

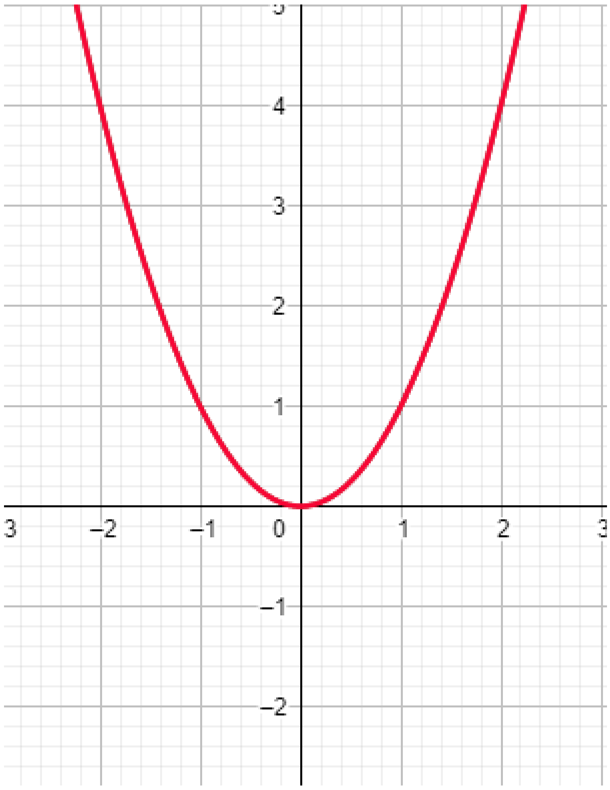


Figura 50: Gráfico da função x².

Fonte: Acervo dos autores.

Será dada a continuidade a explicação, de forma que, será limitado o domínio e o contradomínio para os reais positivos onde, será mostrado que fazendo isso, a função torna-se bijetora e assume inversa. Em seguida, será encontrada a lei de formação da função inversa e será apresentada graficamente (Figura 52).

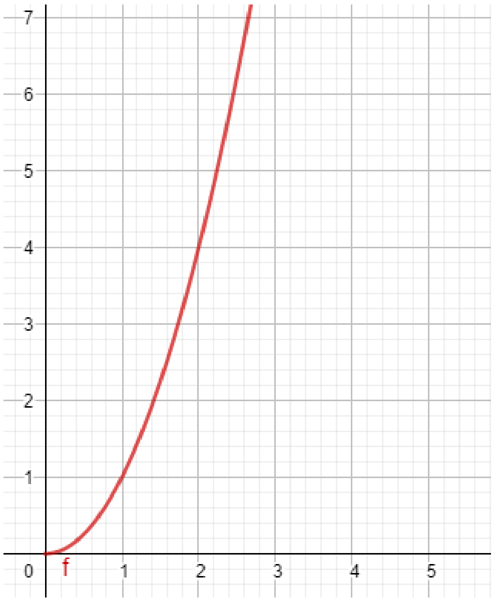


Figura 51: Gráfico parcial da função x².

Fonte: Acervo dos autores.

Continuando a apresentação do conteúdo, será utilizado o método de Bhaskara para desenvolver a equação abaixo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a}$$

$$f(x) = a(x + m)^2 + n$$

$$m = \frac{b}{2a} \; e \; n = 4ac - \frac{b^2}{4a^2}$$

Com isso, pode-se tirar que:

- Quando m for positivo a parábola se desloca (a partir do zero) m unidades para o lado esquerdo.
- Quando m for negativo a parábola se desloca (a partir do zero) m unidades para o lado direito.
- O valor de n significa a quantidade de unidades que a função se desloca para cima ou para baixo, dependendo se o m é positivo ou negativo.

Para facilitar a compreensão, será feito um exemplo utilizando o software Geogebra (Figura 53):

1. $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 8x - 9}$

$$f(x) = 2\left(x^2 + 4x - \frac{9}{2}\right)$$

$$2[(x+2)^2 - 4 - \frac{9}{2}]$$

$$2[(x+2)^2 \; - \; \frac{17}{2}]$$

$$2(x+2)^2 - 17$$

Nesse caso, $m \; = \; 2 \; e \; n \; = \; -17$.

Ou seja, o gráfico da função f(x)= $2x^2+8x-9$ será deslocado 2 casas para o lado esquerdo a partir do zero e se deslocará 17 casas para baixo.

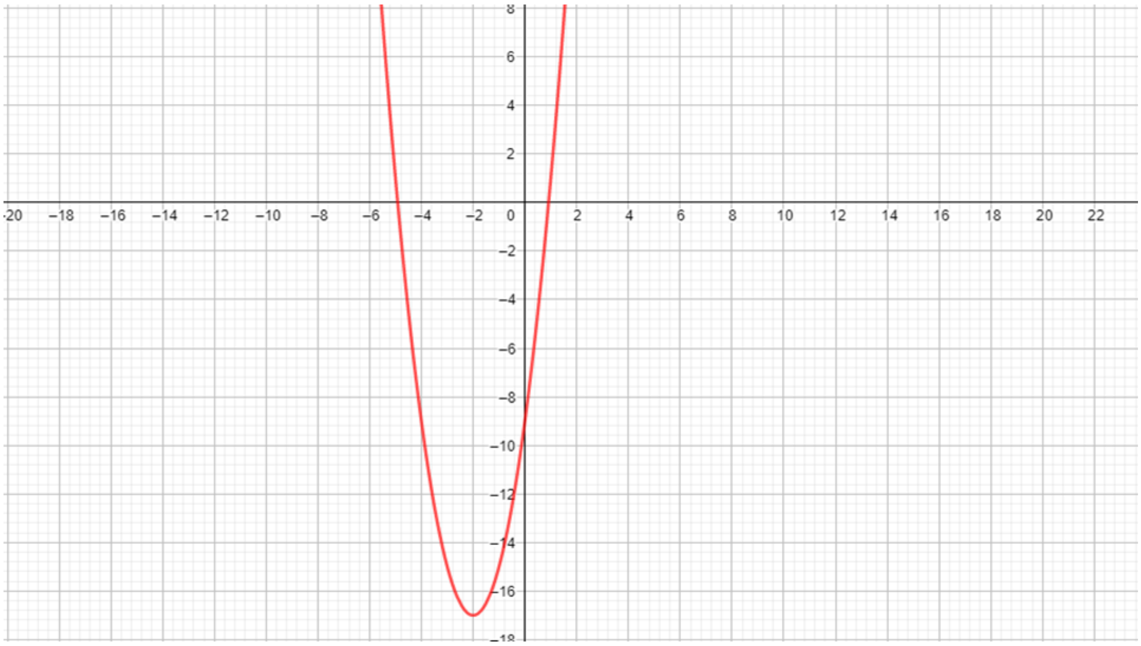


Figura 52: Gráfico da função $2x^2+8x-9$.

Fonte: Acervo dos autores.

Por fim, no último momento da aula, os alunos serão convidados a resolverem os seguintes exercícios,

Exercício 04:(UFRGS - 2011) - O gráfico do polinômio de coeficientes reais $\boldsymbol{p(x) \; = \; ax^2 \; + \; bx + c}$ está representado abaixo:

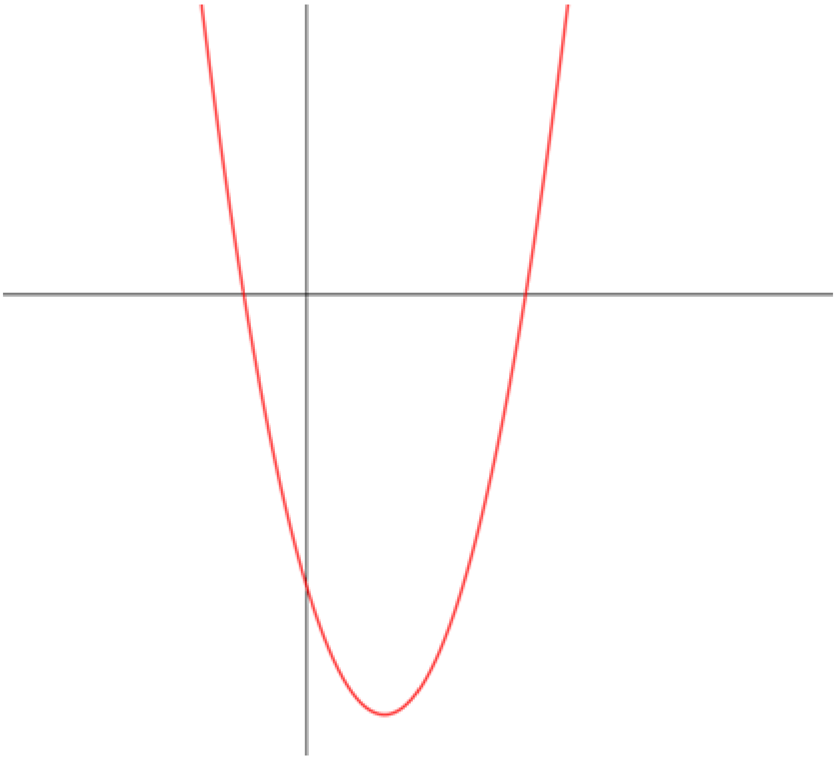


Figura 53: Gráfico de uma função quadrática com concavidade para cima.

Fonte: Acervo dos autores.

Com base nos dados desse gráfico, é correto afirmar que os coeficientes a, b e c satisfazem as desigualdades.

a) a > 0; b < 0; c < 0.

b) a > 0; b < 0; c > 0.

c) a > 0; b > 0; c > 0.

d) a > 0; b > 0; c < 0.

e) a < 0; b < 0; c < 0.

Espera-se que os alunos consigam aplicar os conteúdos vistos anteriormente e compreendam a ***resolução:***

Com base no que se sabe até agora, como a concavidade é voltada para cima, tem-se que a é positivo, como a parábola corta o eixo y em um ponto negativo, tem-se que c é menor que zero, e como a parábola está deslocada à direita da origem tem-se que b é negativo. Logo a resposta é a alternativa a.

Exercício 05: (UNIOESTE, 2019) Em um determinado país, o imposto de renda I é calculado sobre a renda R de um cidadão segundo a seguinte fórmula: I=Rt-D, onde t é uma taxa ou porcentagem e D é um valor a deduzir. Os valores de t e D variam de acordo com valor da renda do cidadão, conforme a tabela a seguir, expressa em unidades monetárias do país.

Faixa de Renda (R)	Taxa a ser aplicada (t)	Dedução (D)
$0 \leq R < 3.000{,}00$	0	0
$3.000{,}00 \leq R < 5.000{,}00$	0,1	300,00
$5.000{,}00 \leq R < 10.000{,}00$	0,2	800,00
$R \geq 10.000{,}00$	0,25	1.300,00

Figura 54: Imagem de tabela de imposto de renda.

Fonte: UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Tarde). [S. l.], 2019. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/ingresso/vestibular2019/gabarito-provas/provasdasegundaetapa-tarde.pdf- Acesso em: 23 fev. 2021.

Sobre o imposto I como função da renda R de um cidadão deste país, é CORRETO afirmar:

a)Um cidadão que tem uma renda inferior a 3.000,00 paga 300,00 de imposto de renda.

b)Qualquer cidadão cuja renda R é tal que 3.000,00 ≤ R <5.000,00 paga o mesmo valor de imposto de renda.

c)Quanto maior a renda do cidadão, menor será o valor do imposto de renda a pagar porque a dedução é maior.

d)Um cidadão, cuja renda é de 8.000,00, gasta efetivamente 10% do seu salário com imposto de renda.

e)A função I=I(R) é uma função definida por partes, constante em cada parte.

Espera-se que os alunos consigam aplicar os conteúdos vistos anteriormente e compreendam a ***resolução:***

a)Um cidadão com renda abaixo de 3000 R$ não paga imposto de renda.

b)Nesta faixa, o imposto é variável de acordo com a renda.

c)Mesmo com a dedução o imposto de renda aumenta conforme a renda.

d)I=Rt-D=8000.0,2-800=1600-800=800R$, logo a afirmação é verdadeira.

e)A função não é constante em cada parte (nem no geral), é crescente.

O seguinte exercício será proposto como exercício de casa:

Exercício 06 - (UNIOESTE - 2017) A função definida por $f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$, onde a, b e c são constantes reais, representa quanto José tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Assim, x é um número natural tal qual $1 \leq x \leq 31$ e f(x) é o valor, em reais, que José tinha em sua carteira no final do dia x. Da mesma forma, a função $g(x) = mx + n$ onde m e n são constantes reais, representa quanto Paulo tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Sabe-se que no final do primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras. No segundo dia, Paulo tinha R$7,00. No dia 16, José tinha R$120,00. No dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.
Com base nestas informações, é correto afirmar que:

a)Ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é $S = \frac{-8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1)$.

b)Ao final do dia 18 José tinha R$5,00 a mais que Paulo.

c)A expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo tem na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

d) $f(x) = -x^2 + 32x - 31$.

e)Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

Espera-se que os alunos consigam aplicar os conteúdos vistos anteriormente e cheguem a uma ***resolução:***

Inicialmente será observado que nessas funções o domínio é definido nos naturais e no intervalo [1,31], logo será obtido um gráfico de pontos no plano cartesiano.

José: $\boldsymbol{f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c}$

Paulo: $\boldsymbol{g(x) = mx + n}$

Para descobrir os valores reais a, b, c, m e n será usado as informações:

Primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras.

José: $\boldsymbol{0 = a(1-1)^2 + b(1-1) + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1)}$

Paulo: $\boldsymbol{0 = m1 + n \Rightarrow n = -m \Rightarrow g(x) = mx - m}$

Segundo dia, Paulo tinha R$7,00.

$$\boldsymbol{g(x) = mx - m \Rightarrow 7 = 2m - m \Rightarrow 7 = m \Rightarrow g(x) = 7x - 7}$$

Dia 16, José tinha R$120,00.

$\boldsymbol{f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) \Rightarrow 120 = a(16-1)^2 + b(16-1) \Rightarrow 120 = a(15)^2 + 15b}$ ***(01)***

Dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

$\boldsymbol{0 = a(31-1)^2 + b(31-1) \Rightarrow a(30)^2 + 30b = 0 \Rightarrow 30b = -9}$

$\boldsymbol{\Rightarrow b = -30a}$

Consegue-se obter o b em função de a, então pode-se substituir na equação (01)

$$\boldsymbol{120 = 15.15a + 15(-30a) \Rightarrow 120 = 15a(15-30) \Rightarrow \frac{120}{-15} = 15a \Rightarrow -8}$$

$$\boldsymbol{= 15a \Rightarrow a = \frac{8}{-15}}$$

Como $\boldsymbol{b = -30a \Rightarrow b = 16}$

Conclui-se que as funções que descrevem a quantidade de dinheiro que José e Paulo têm ao final de cada dia é respectivamente.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{-8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)}$$

$$\boldsymbol{g(x) = 7x - 7 \Rightarrow g(x) = 7(x-1)}$$

Além disso, com base nos conteúdos vistos em aula, espera-se que os alunos sejam capazes de analisar as alternativas da seguinte forma:

a)Ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é S

$$\boldsymbol{f(x)+g(x)=\frac{-8}{15}(x-1)^2\ +\ 16(x-1)\ +\ 7(x-1)=}$$
$$\boldsymbol{=\ \frac{-8}{15}(x-1)^2\ +23(x-1)}$$

b)Ao final do dia 18 José tinha R$5,00 a mais que Paulo.

Como a função de José é uma parábola com a <0, possui valor máximo. De acordo com o enunciado, como nos dias 0 e 31 não há dinheiro na carteira, então são os pontos que zeram a função, ou seja, suas raízes são x=0 e x=31. Por conta da simetria do gráfico da função quadrática (parábola) o valor máximo é assumido quando o x=16. No intervalo de [0,16) a função cresce, portanto o dinheiro de José aumenta. No intervalo (16,31] a função decresce, portanto o dinheiro de José diminui. Ao calcular o valor máximo, encontra-se que o máximo que José teve na carteira foi de f(16)=R$120,00.

No dia 18, substituindo-se na g(x), encontra-se que Paulo tinha R$119,00 na carteira. Logo, é impossível que José tenha 5 reais a mais que Paulo, pois a função assumida para o valor que José tem na carteira é decrescente no instante 18, e assumirá um valor menor que R$120,00. Portanto é

c)A expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo tem na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

Não, pois a soma apresentada na alternativa "a" e a soma de um polinômio de grau 2 com um polinômio de grau 1, será no máximo um polinômio de grau 2. Na função definida na alternativa "a" para a soma é $\boldsymbol{\frac{-8}{15}(x-1)^2+23(x-1)}$***, que possui grau dois, pois seu expoente de maior valor é 2.***

d) $\boldsymbol{f(x)\ =\ -x^2+32x-31}$***. Não é verdade, pois*** $\boldsymbol{f(x)=\ (\frac{-8}{15})(x-1)^2+16(x-1)}$***.***

e) Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

Não, pois a função assumida para o valor que Paulo tem na carteira é do primeiro grau é crescente, portanto, o maior valor no intervalo [0,31] é no instante 31: $\boldsymbol{f(31)=7(x-1)=7(31-1=210)}$***. E como visto na alternativa "b", o valor máximo que José pode possuir na carteira é R$120,00.***

A escolha de apresentar a análise das alternativas, tem o objetivo de revisar os conceitos apresentados até então e compreender o que os alunos já sabem sobre soma de polinômios, conteúdo a ser abordado na próxima aula.

Na alternativa “b”, optou-se por sintetizar o que foi trabalhado sobre função quadrática. A forma apresentada possui uma análise diferenciada, que diminui a dificuldade das operações e aborda diferentes conteúdos que pode auxiliar os alunos a responder de forma mais prática e rápida, contribuindo no seu desempenho em vestibulares futuros.

Na alternativa “e”, realizou a revisão dos conceitos da função afim, ao analisar a função apresentada na questão.

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.3.1 Relatório Aula 3

No dia vinte de março de 2021, às 09 horas, iniciou-se a terceira aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), oferecido pelo curso de Licenciatura em matemática da Unioeste - campus de Cascavel. A aula foi ministrada pelos acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin, onde trabalharam os conteúdos de função afim e função quadrática. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Pâmela Gonçalves. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando o aplicativo jitsi. Observou-se que houve uma queda no número de alunos presentes na sala ao comparar com as aulas anteriores, mais precisamente, 15 alunos participaram da aula.

Nesta aula, os acadêmicos optaram por realizar uma aula dinâmica de modo que o rendimento da aula melhorasse, considerando que os conteúdos da aula anterior não foram inteiramente concluídos. Para isso utilizou-se os softwares:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;
- Geogebra que permitiu trabalhar com gráficos de maneira dinâmica.

O início da terceira aula deu-se por meio da resolução de questões que os acadêmicos deixaram na lista de exercícios da aula anterior, a partir deste, foi relembrado sobre o conteúdo de função afim trabalhado na aula anterior. Em seguida, foi dado prosseguimento no conteúdo, trabalhando sobre "raiz de uma função afim''. Foi apresentado exemplos da expressão algébrica da função afim e seu comportamento gráfico. Foi possível observar que os alunos compreenderam o exercício, considerando que interagiram bastante e sanaram suas dúvidas.

A apresentação inicial do conteúdo de raíz de função afim foi realizada através de um exercício, em seguida o conteúdo foi formalizado. O exercício inicial utilizado foi resolvido, bem como outros exercícios. Foi possível observar que os alunos compreenderam com facilidade o conteúdo apresentado, interagindo sempre que solicitado pelos acadêmicos. Porém, notou-se que os alunos tiveram dificuldade em compreender e identificar as raízes no gráfico, essas dúvidas puderam ser esclarecidas, utilizando-se o software Geogebra.

Quando foi trabalhado sobre funções inversas, os acadêmicos optaram por utilizar um exemplo do primeiro grau, no qual a inversa foi identificada e seu gráfico foi demonstrado no software Geogebra. Foi explicado sobre a simetria em relação a reta x. Observou-se que os alunos compreenderam o conteúdo apresentado.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado, pois não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: funções quadráticas, concavidade e comportamento de uma função quadrática, raiz de uma função quadrática, completamento de quadrados, método de Bhaskara, relações de Girard e fatoração de uma função quadrática.

Um fato importante a se mencionar, é o fato de que no momento que os acadêmicos apresentaram a fórmula de Bhaskara, um aluno comentou “até hoje nunca tinha entendido a fórmula delta”, e nesse momento os alunos explicaram que o delta não é uma fórmula e sim uma forma de abreviar escrita.

Acredita-se que os alunos compreenderam e entenderam o conteúdo aplicado considerando que teve grande participação, verbalmente e por escrito no chat. Houve comentários que demonstraram o interesse e o desenvolvimento dos alunos no decorrer da aula.

Pelo fato de as aulas serem remotas, os exercícios propostos em sala são feitos juntamente com os acadêmicos, não tendo um tempo exclusivo para o aluno tentar resolvê-lo. Porém, são propostos exercícios para casa por meio de uma lista, que será corrigida no decorrer das aulas.

É importante ressaltar que alguns dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE e de outros vestibulares.

Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória, atendendo as expectativas pois, de todo conteúdo programado pelos acadêmicos, apenas um não foi possível concluir, utilizaremos este exercício para dar início na próxima aula. Acredita-se que o conteúdo apresentado foi compreendido pelos alunos.

3.4 Plano de Aula 4

Conteúdo: Polinômios.

Objetivo geral: Apresentar o conceito de polinômio e suas propriedades.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com polinômios, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar um polinômio.
- Compreender conceitos básicos de um polinômio.
- Definir o grau de um polinômio.
- Compreender a soma, subtração, multiplicação e divisão polinomial.
- Fatorar um polinômio.
- Identificar e encontrar as raízes de um polinômio

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Mentimeter, Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

No primeiro momento, será mostrada a imagem abaixo para os alunos e os seguintes questionamentos serão feitos: “Quais são as medidas dos lados do retângulo? E a sua área?”, “Quais são as medidas dos lados do cubo? E seu volume?” e “Quais são as medidas dos lados do paralelepípedo? E seu volume?”

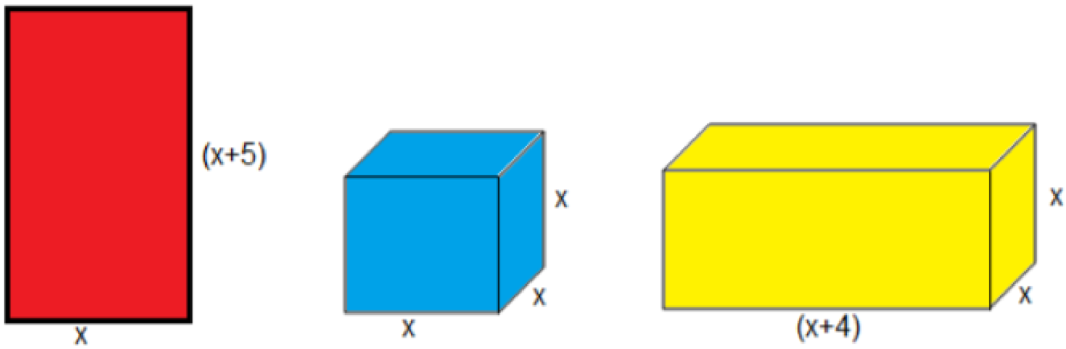


Figura 55: Representação retângulo, cubo e paralelogramo.

Fonte: PIRES, Vanessa da Silva. Aula de Polinômios, p. 3. Disponível em: http://matinterdisciplinar.pbworks.com/w/file/fetch/88827266/Plano%20de%20aula%20polin%C3%B4mios.pdf. Acesso em: 25 fev. 2021

Espera-se que os alunos consigam compreender com facilidade as informações pedidas sobre cada figura, e assimilem que,

a) A primeira figura é um retângulo de dimensões x e (x+5). Portanto sua área será x^2+5x.

b) A segunda figura é um cubo com arestas de medida x. Seu volume será x^3.

c) A terceira figura é um paralelepípedo, com arestas de medidas, (x+4) e x. Seu volume é x^3+4x^2

Espera-se que os alunos consigam relacionar a área e o volume das formas com um polinômio. Essa discussão sobre áreas e volumes das figuras será utilizada para definir função polinomial,

> Chama-se de função polinomial a toda:
>
> f: IR→IR
>
> $$x \to \; P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
>
> em que,
>
> n: número inteiro não negativo
>
> Veja o exemplo:
>
> $P(x)= 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 8$

Uma função polinomial que não possui as operações de adição e subtração é denominada função monomial ou monômio.

Chamamos de polinômio nulo, o polinômio $x \to P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 = 0$

Na sequência, será definido o grau de uma função polinomial da seguinte forma,

Seja $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2+\ldots+a_n x^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de f, e representa-se por ∂f ou gr f o número natural p tal que $a_n \neq 0$ e a_i=0 para todo i>n, ou seja,

$$\partial f = n \Leftrightarrow a_n \neq 0 \text{ e } a_i = 0\ \forall\ i > n$$

Na sequência os alunos serão convidados a responder qual o grau das seguintes funções polinomiais:

$P(x) = 90x + 1$

$G(x) = 2x^2 + 2$

$H(x) = 3x^2 + 3x + 6$

$B(x) = 56x^3 + 44x^2 + 56x + 67$

$K(x) = x^3 + 3$

$D(x) = 13x^7 + x^4 + 8x + 53$

Resolução: $\boldsymbol{\partial P = 1}$***;*** $\boldsymbol{\partial G = 2}$***;*** $\boldsymbol{\partial H = 2}$***;*** $\boldsymbol{\partial B = 3}$***;*** $\boldsymbol{\partial K = 3}$ ***e*** $\boldsymbol{\partial D = 7}$

Espera-se que os alunos consigam responder corretamente todos os exemplos, sem dúvidas. Caso ocorra alguma resposta não esperada, será novamente explicado o conceito de grau. Em seguida, será proposto o exercício abaixo:

Exercício 01: (Iezzi) Determine o grau do seguinte polinômio:

$$\boldsymbol{f = -x^2 + (x+2)^2 - 4x}$$

Resolução:

Espera-se que os alunos desenvolvam o termo (x+2)² e percebam que o grau deste polinômio é 0. Caso seja recebido respostas diferentes de 0, será explicado o desenvolvimento do termo (x+2)².

Ao expandir o termo $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2$ ***encontra-se*** $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2 = (\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) = \boldsymbol{x}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}$. ***Assim,***

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^2\,(+\,\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\,) - \mathbf{4}\boldsymbol{x}$$

Ao simplificar os termos semelhantes, tem-se:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4}$$

E, portanto, a função possui grau 0.

Após a resolução do exercício será definida a igualdade entre dois polinômios como,

Sejam $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$
Diz-se f e g são iguais (ou idênticos) quando a_0=b_0,a_1=b_1,...,a_n=b_n

Após isso, os alunos serão instigados a resolverem, juntamente com os professores, os exercícios abaixo:

Exercício 02: (Iezzi - Adaptado) - Dados os polinômios $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ **e** $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{d})\boldsymbol{x}^2 + (\mathbf{3}\boldsymbol{e})\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ **encontre d e e para que f seja igual a g.**

Resolução:

Será chamada atenção dos alunos para o fato de que, pela definição de igualdade de polinômios, os termos que acompanham $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^n$ ***devem ser precisamente iguais. Ou seja, é preciso que: 2=-d e 3=3e.***

Logo, $\boldsymbol{d} = -\mathbf{2}$ ***e*** $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$.

Espera-se que neste exercício fique claro o conceito de igualdade de polinômios. Será dado foco na definição, onde se deve ter exatamente os mesmos termos acompanhando $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2, \ldots, x^n$.

Exercício 03: (EducaMaisBrasil - Adaptado) - Seja os polinômios $\boldsymbol{A(x)} = -\boldsymbol{2x^2 + 5x - 2}$ e $\boldsymbol{B(x) = -3x^3 + 2x - 1}$. Encontre o polinômio $\boldsymbol{C(x) = A(x) - B(x)}$.

Resolução:

$$\boldsymbol{C(x) = A(x) - B(x) = -2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1}$$
$$\boldsymbol{= -2x^2 + 3x + 3x^3 - 1 = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$$

Espera-se que com esse exercício, os alunos tenham compreendido o conteúdo proposto até o momento. Acredita-se que os alunos serão capazes de resolver o exercício sem que a definição de soma e subtração tenha sido propriamente apresentada. Apenas após a sua resolução que os conceitos serão definidos da seguinte forma,

Para efetuarmos a adição e subtração de polinômios devemos agrupar termos semelhantes. Um termo é considerado semelhante a outro, quando possui a mesma parte literal.

Por exemplo:

1. -7z é semelhante a 100z, pois possui a mesma parte literal que é z.
2. $3x^2$ é semelhante a x^2, pois possui a mesma parte literal que é x^2.

Após trabalhar o conteúdo de soma e subtração de polinômios, a próxima operação a ser trabalhada será a multiplicação. Desta forma, será apresentada a definição,

Para realizarmos a multiplicação de polinômios, utilizamos a propriedade distributiva, com isso multiplicamos cada termo de um dos polinômios pelo outro termo do outro polinômio. Caso haja termos semelhantes, ou seja, com a mesma parte literal, devemos agrupá-los.

Por exemplo:

$$(3x^2 + 2x).(2x^2 - 5x) =$$

$3x^2.2x^2 + 3x^2.(-5x) + 2x.2x^2 + 2x.(-5x)$=

Utilizando a propriedade de potências: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$tem-se:

$= 6x^4 - 15x^3 + 4x^3 - 10x^2$

$= 6x^4 - 11x^3 - 10x^2$

A fim de verificar se houve a compreensão do conteúdo, será realizado o exercício abaixo com os alunos.

Exercício 04: (Iezzi - Adaptado) - A partir dos polinômios: Obtenha os números reais a, b e c de modo que $\boldsymbol{k = af + bg + ch}$

$\mathbf{f = x^2}$

$\mathbf{g = x^2 + x^4}$

$\mathbf{h = x^2 + x^4 + x^6}$

$\mathbf{k = 2x^2 + -6 + 3x^6}$

Resolução:

$$\boldsymbol{2x^2 + -6 + 3x^6 = a(x^2) + b(x^2 + x^4) + c(x^2 + x^4 + x^6)}$$

$$\boldsymbol{= ax^2 + bx^2 + bx^4 + cx^2 + cx^4 + cx^6}$$

$$\boldsymbol{= (a + b + c)x^2 + (b + c)x^4 + (c)x^6.}$$

$\boldsymbol{c = 3}$

$\boldsymbol{b + c = -6}$***, logo*** $\boldsymbol{b = -9}$

$\boldsymbol{a + b + c = 2}$***, logo*** $\boldsymbol{a = 8}$

Espera-se que para a resolução deste exercício os conceitos aplicados até então sejam suficientes. Acredita-se que os alunos terão compreendido o conteúdo e serão capazes de executar as somas e multiplicações sem nenhuma dificuldade.

Adiante, o whiteboard será utilizado para, inicialmente, efetuar uma divisão euclidiana entre os números 21 e 5. Nesse momento, os conceitos básicos de divisão e a nomenclatura de cada termo serão retomados. Após isso, será apresentada a divisão de polinômios,

Dados dois polinômios f (dividendo) e g ≠ 0 (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as seguintes condições:

i) q g + r = f

ii) gr r < gr g ,ou r = 0

Quando r=0 diz-se que a divisão é exata

Considerando que a divisão de polinômios na forma Euclidiana dar-se-á no whiteboard, e com o intuito de sanar alguma dúvida que possa surgir, será disponibilizado um “roteiro” de como efetuar uma divisão entre polinômios, para que os alunos possam usar extraclasse.

I. Dividimos o monômio de mais alto grau de f(x) pelo monômio de mais alto grau de g(x).
II. Subtraímos do dividendo o produto do divisor g(x) pelo quociente encontrado em (II), obtendo assim o primeiro resto parcial.
III. Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau de g(x).
IV. Subtraímos do primeiro resto parcial o produto do divisor g(x) pelo quociente encontrado em (IV), obtendo assim o segundo resto parcial.
V. A partir da definição de divisão é possível ver que o processo da divisão euclidiana continua até que o resto seja zero ou o grau do resto seja menor que o grau do divisor.

Em seguida, serão realizados os seguintes exercícios de divisão entre polinômios:

Exercício 05: (Iezzi - Adaptado) - Qual o resto da divisão entre os polinômios f = $x^3+2x^2+3x=4$ e g = x-2?

Resolução:

x^3	$+2x^2$	$+3x$	-4	$x-2$
$-x^3$	$+2x^2$			$x^2+4x+11$

$$
\begin{array}{rrrr}
\hline
0 & +4x^2 & +3x & \\
 & -4x^2 & +8x & \\
\cline{2-4}
 & 0 & +11x & -4 \\
 & & -11x & +22 \\
\cline{3-4}
 & & & +18
\end{array}
$$

A resolução acima será feita passo a passo. Espera-se que os alunos consigam assimilar a semelhança com a divisão euclidiana e encontrar o resultado desejado. Caso surjam dúvidas, será retomado o conceito de divisão entre polinômios.

Exercício 06: (Iezzi - Adaptado) - Dividindo o polinômio $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{x^2 - 3x + 5}$ obtém-se quociente $\boldsymbol{x^2 + 1}$ e resto $\boldsymbol{3x - 5}$. Determine $\boldsymbol{f}$.

Resolução:

Por definição de divisão, temos: $\boldsymbol{f = qg + r}$ ***então***

$\boldsymbol{f = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 5) + (3x - 5)}$

$\boldsymbol{f = (x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1x^2 - 3x + 5) + (3x - 5)}$

$\boldsymbol{f = x^4 - 3x^3 + 6x^2}$

Diferentemente do primeiro exercício proposto, espera-se que com esse exercício, averiguar a aplicação da definição de divisão entre polinômios.

No momento seguinte, será utilizado o software Geogebra para representar os gráficos das funções: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ e $g(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ com o propósito de mostrar aos alunos que conforme altera-se os coeficientes das funções f e g, não há uma forma gráfica fixa a ser definida para polinômios de grau maior ou igual a 3. Será relembrado aos alunos que o gráfico de uma função afim sempre será uma reta, e de uma função quadrática sempre será uma parábola.

Espera-se que neste momento, os alunos tenham compreendido o conteúdo. Então, com base em conhecimentos apresentados em aulas anteriores, será definido raiz de um polinômio da seguinte forma:

> Assim como nos casos anteriores (função afim e função quadrática), temos que, dados o número r e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, dizemos que r é raiz, ou zero, de f quando $f(r) = 0$.
>
> Graficamente, as raízes reais de um polinômio são os pontos em que o gráfico de f corta o eixo do x (eixo das abcissas).

Aproveitando a introdução deste conteúdo, será retomado com os alunos o conceito de fatoração de uma função quadrática para que seja possível definir a fatoração de um polinômio qualquer,

> Todo polinômio f de grau n (n ≥ 1),
> $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$
> pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:
> $f(x) = a_n\,(x - r_n)(x - r_{n-1})...(x - r_1)$
> Onde r_1,r_2, r_3,..., r_n são as raízes de P.
> Notem que cada termo $(x - r_1)$ é divisor de f(x).

Para ilustrar a fatoração de polinômios, serão feitos os exemplos abaixo:

1. $\boldsymbol{f = x^3 + 5x^2 + 4x}$

Resolução:

Pode-se escrever o polinômio f como $\boldsymbol{f = 1(x)(x+1)(x+4)}$ e portanto, as raízes do polinômio são 0, -1 e -4.

2. $\boldsymbol{g = -6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x}$

Resolução:

Podemos escrever o polinômio $\boldsymbol{g}$ como $\boldsymbol{g = -6(x)(x - \frac{2}{3})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})}$ e portanto, as raízes do polinômio são 0, $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$, $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

Serão disponibilizados para os alunos o resumo de casos notáveis de fatoração,

1)Fator comum em evidência: $ax+ax^2+ax^3 = a(x+x^2+x^3)$

2)Agrupamento: $ax+ax^2+bx+bx^2 = a(x+x^2)+b(x+x^2) = (a+b)(x+x^2)$

3)Trinômio Quadrado Perfeito: $(dx+e)^2 = d^2x^2+2edx+e^2$, podemos escrever a equação acima como ax^2+bx+c, caso $a = d^2$, $b=2.e.d$ e $c = e^2$

4)Diferença de dois Quadrados: $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$

5)Diferença de dois Cubos: $x^3+a^3 = (x+a)(x^2-xa+a^2)$

6)Soma de dois cubos: $x^3-a^3 = (x-a)(x^2+xa+a^2)$

A próxima definição apresentada será referente ao número de raízes de um polinômio e suas multiplicidades.

A quantidade de raízes de um polinômio está diretamente relacionada ao grau deste polinômio.

Por exemplo, um polinômio de grau 2 terá duas raízes. Por sua vez, um polinômio de grau 3 terá três raízes.

Vale ressaltar que as raízes de um polinômio podem ser iguais, por exemplo:

1. O polinômio $P(x) =(x-3)(x -1)(x-1)(x-4)(x-4)(x-4) = 0$

Pode ser escrito como $P(x)=(x-3)(x -1)^2(x-4)^3 =0$

Assim, podemos perceber que esse polinômio apresenta seis raízes sendo:

→ Uma raiz igual a 3;

→ Duas raízes iguais a 1;

→ Três raízes iguais a 4.

Em seguida, expandindo o conceito de raízes, serão apresentadas as propriedades:

Considerando uma função polinomial $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x + a_0$ ($a_n \neq 0$), com todos os coeficientes inteiros.

1º) Se $P(x)$ admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (onde p ∈ Z, q ∈ Z*, com p e q primos entre si), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. 2º) Se $P(x)$, com $a_0 \neq 0$, admite uma raiz inteira r, então r é divisor de a_0 (termo independente de P). 3º) $P(x)$ pode admitir raízes reais e complexas, se uma raiz é número complexo $z_1 = a + bi$ $(b \neq 0)$, então ela também admite a raiz $z_2 = a - bi$, conjugada de z.

Espera-se que os alunos percebam que o número de raízes complexas e não reais de um polinômio é sempre par, além disso, caso o grau de P seja ímpar, haverá um número ímpar de raízes reais.

No último momento, serão propostos os seguintes exercícios, com intuito de trabalhar o conteúdo de raízes racionais e complexas, assim como introduzir o conceito de equação polinomial:

Exercício 07: (FAMEMA - 2019) Na equação polinomial x³ - 2x² - x + 2 = 0, uma das raízes é -1. O módulo da diferença entre a menor e a maior das raízes é:

a) 4.

b) 1.

c) 2.

d) 0.

e) 3.

Resolução:

x³ - 2x² - x + 2 = 0, uma das raízes é -1. Como os coeficientes são reais admite raízes racionais da forma p/q onde o q divide 1 (coeficiente do x³) e p divide 2 (termo independente). Logo as possíveis raízes são divisores de 2, ou seja, o conjunto {-2, -1, 1, 2} então pode-se testar se
-2, 1 e 2 são raízes.

- ***Substituindo x=-2:***
  (-2)³-2(-2)²-2+2 = -8 -8 -2 +2 = -16 não é raiz
- ***Substituindo x=1:***
  1³-2.1²-1+1=0 1 é raiz

- ***Substituindo x=2:***
  $2^3 - 2(2^2) - 2 + 2 = 0$ 2 é raiz

Assim, a maior raiz é 2 e a menor é -1, então o módulo da diferença entre as raízes é |-1-2| = |-3| = 3.

Os alunos serão orientados que uma outra resolução possível seria diminuir o grau do polinômio dividido por (x+1) e encontrar as raízes da função quadrática.

Neste exercício, será atentado ao fato de que uma equação polinomial é uma igualdade da seguinte forma P(x) = Q(x).

Acredita-se que os alunos serão capazes de associar o fato que resolver uma equação polinomial é equivalente a achar as raízes de um polinômio.

Exercício 08: (UFRGS- 2013) As raízes do polinômio $p(x)=x^3+5x^2+4x$ são:

a)-4,-1 e 0.

b)-4,0 e 1.

c)-4,0 e 4.

d)-1,0 e 1.

e)0,1 e 4.

Resolução:

Por substituição $p(x)=x^3+5x^2+4x$ são

- ***p(0)=0 é raiz***
- ***p(-1)=-1+5-4=0 é raiz portanto alternativa A ou D são possíveis respostas.***
- ***p(1)= 1+ 5 +4 = 10 não é raiz, então alternativa A correta.***

Para conferir:

- ***p(-4)=-64+5.16-16= 0 é raiz***

Espera-se que os alunos percebam que a substituição das possíveis raízes é uma solução rápida neste exercício, pois tem-se poucas possibilidades.

Exercício 09: (UNIOESTE - 2017) Considere as seguintes afirmações:

I. $\frac{(x^2+1)}{(x+2)} \neq \frac{(x+1)}{2}$***, para todo x $\in$ IR***

II. $2x + 5 = 2(x + 5)$***, para todo x $\in$ IR***

III. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$***, para todo x $\in$ IR***

A)Somente a afirmação I está correta.

B)Somente a afirmação II está correta.

C)Somente as afirmações I e II estão corretas.

D)Somente a afirmação III está correta.

E)As três afirmações estão corretas

Resolução:

Analisando as afirmações:

I. ***A primeira equação é falsa, pois para qualquer x ≠ 0, tem-se*** $\frac{(x^2+1)}{(x+2)} \neq \frac{(x+1)}{2}$.

Para demonstrar que a igualdade descrita no problema é falsa, basta encontrar um valor que não satisfaça a igualdade. Tomando $x = 1$ ***tem-se:***

$$\frac{(x^2+1)}{(x+2)} = \frac{(x+1)}{2}$$

$$\frac{(1^2+1)}{(1+2)} = \frac{(1+1)}{2}$$

$$\frac{1}{3} = 2$$

O que é um absurdo, pois $\frac{1}{3} \neq 2$**.**

II. ***A segunda equação é falsa, pois temos que*** $2x + 5 = 2(x + 5)$

$2x + 5 = 2x + 10$

$5 = 10$***, ou seja, é um absurdo.***

III. ***A terceira equação é verdadeira, pois para todo x real tem-se*** $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4$

Considerando que apenas a afirmativa III está certa, a alternativa correta é a letra "d".

Espera-se que o conceito apresentado de equação polinomial seja suficiente para a resolução deste exercício. Caso os alunos apresentem alguma dúvida em relação ao conteúdo apresentado ou ao enunciado dos exercícios, o conteúdo em questão será retomado.

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.4.1 Relatório Aula 4

No dia vinte e sete de março de 2021, às 09 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado I, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste - Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula a partir do conteúdo iniciado na aula passada: Máximo e Mínimo de uma função quadrática e o conteúdo de polinômios, faltando o último conteúdo a ser concluído.

A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani e ministrada de modo virtual, utilizando a plataforma jitsi meet. Observou-se que houve um número grande de ausentes, tendo em sala cerca de 13 alunos, uma quantidade semelhante aos da aula passada.

Os acadêmicos optaram por ministrar uma aula mais interativa. Para isso, foram utilizados softwares como:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando

se usa a lousa;

- Geogebra que permitiu trabalhar com gráficos de maneira dinâmica.

A aula foi iniciada com o conteúdo de máximo e mínimo de uma função quadrática. Após isso, iniciou-se as atividades e o conteúdo elaborado no plano 4. De todo o conteúdo proposto, foi trabalhado até a parte de raízes complexas. Acredita-se que o restante do conteúdo elaborado será finalizado na parte inicial da aula 5, sem alterar drasticamente o conteúdo programático.

Esta aula ocorreu de uma maneira mais fluida e leve, durante a explicação do conteúdo houve pouca participação dos alunos por voz, mas, com incentivo, a participação pelo chat tornou-se frequente. Os alunos estavam mais à vontade para enviar mensagens, com dúvidas e respostas a questionamentos da aula. Acredita-se que isso se deve ao fato das constantes indagações feitas, estimulando os alunos a participarem, mesmo que fosse para mandar uma única mensagem.

Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: máximo e mínimo de uma função quadrática, inversa de uma função quadrática, função polinomial, grau de um polinômio, igualdade de polinômios, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, raiz e fatoração de um polinômio, números e multiplicidade de raízes de um polinômio, raízes racionais, teorema fundamental da álgebra e raízes complexas, nesta ordem. O conteúdo de equação polinomial será adequado para ser trabalhado na aula seguinte.

Porém, é notável que a sensação presente nas aulas é a de que os alunos se encontram distraídos e consequentemente não absorvem todo o conteúdo exposto, além de não apresentarem dúvidas ou questionamentos sobre os exercícios propostos para casa, causando dúvida se assimilam o conteúdo, de modo que os exercícios se tornaram de fácil resolução, ou se não os resolvem.

Pelo fato de as aulas serem remotas, os exercícios propostos em sala são feitos juntamente com os acadêmicos, não tendo um tempo exclusivo para o aluno tentar resolvê-lo.

É importante ressaltar que alguns dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Conclui-se que a aula ocorreu de forma proveitosa com ressalvas a participação dos alunos, que embora tenha acontecido, pareceu artificial.

3.5 Plano de Aula 5

Conteúdo: Progressão Aritmética.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de sequências e de progressões aritméticas.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com progressões aritméticas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Perceber uma sequência lógica.
- Identificar uma progressão aritmética.
- Diferenciar uma sequência qualquer de uma progressão Aritmética.
- Encontrar um termo desejado na Progressão Aritmética.
- Encontrar a soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

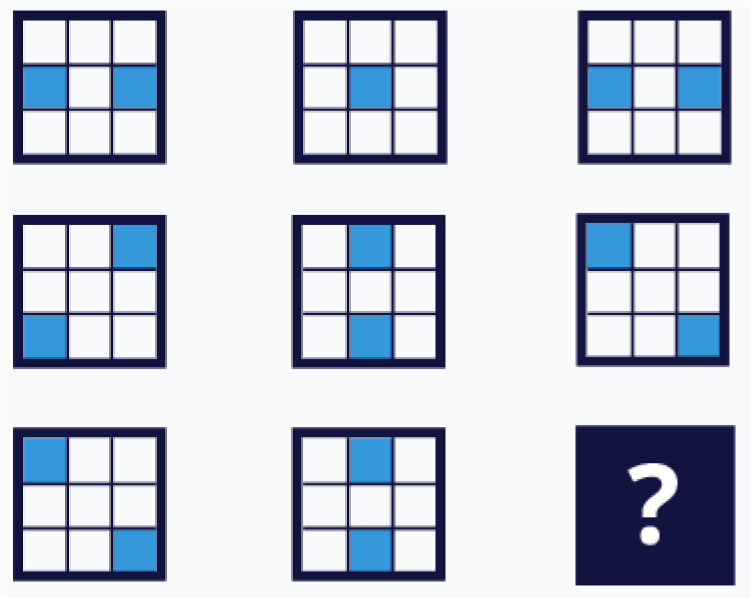
Recursos didáticos:

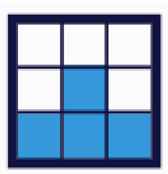
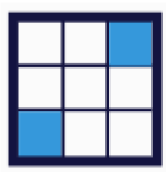
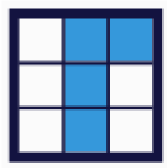
Softwares: Mentimeter, Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi, Kahoot!. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente será perguntado aos alunos o que eles compreendem por sequência. Espera-se que as respostas sejam relacionadas com a ideia de continuidade ou uma ordem lógica. Após ouvir e discutir as respostas será feito uma dinâmica no aplicativo Kahoot! Será apresentada a sequência de figuras abaixo e alunos precisam encontrar a próxima.

1.



a)  b)  c) 

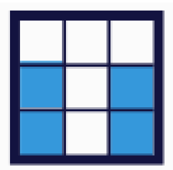
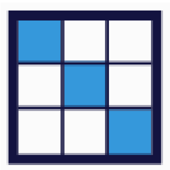
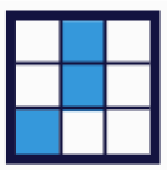
d)  e)  f) 

Figura 56: Exemplo 1: Encontrar o próximo elemento da sequência.

Fonte: BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021.

2.

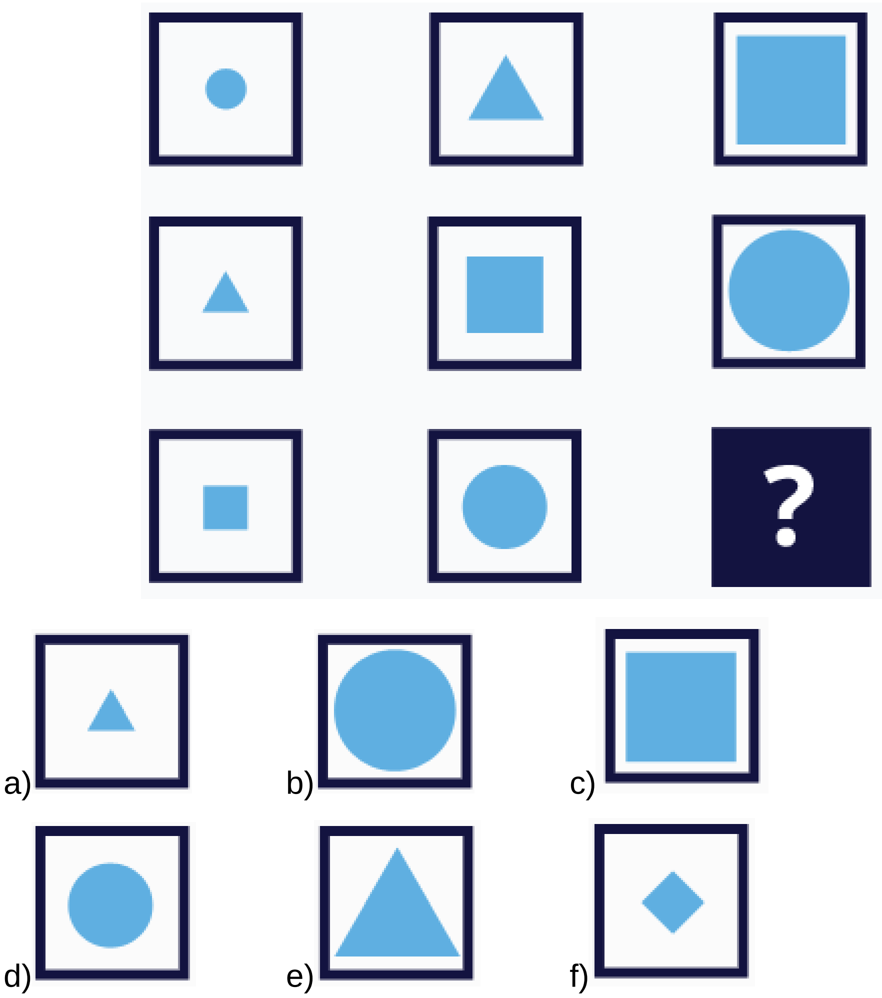


Figura 57: Exemplo 2: Encontrar o próximo elemento da sequência.

Fonte: BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021.

3.

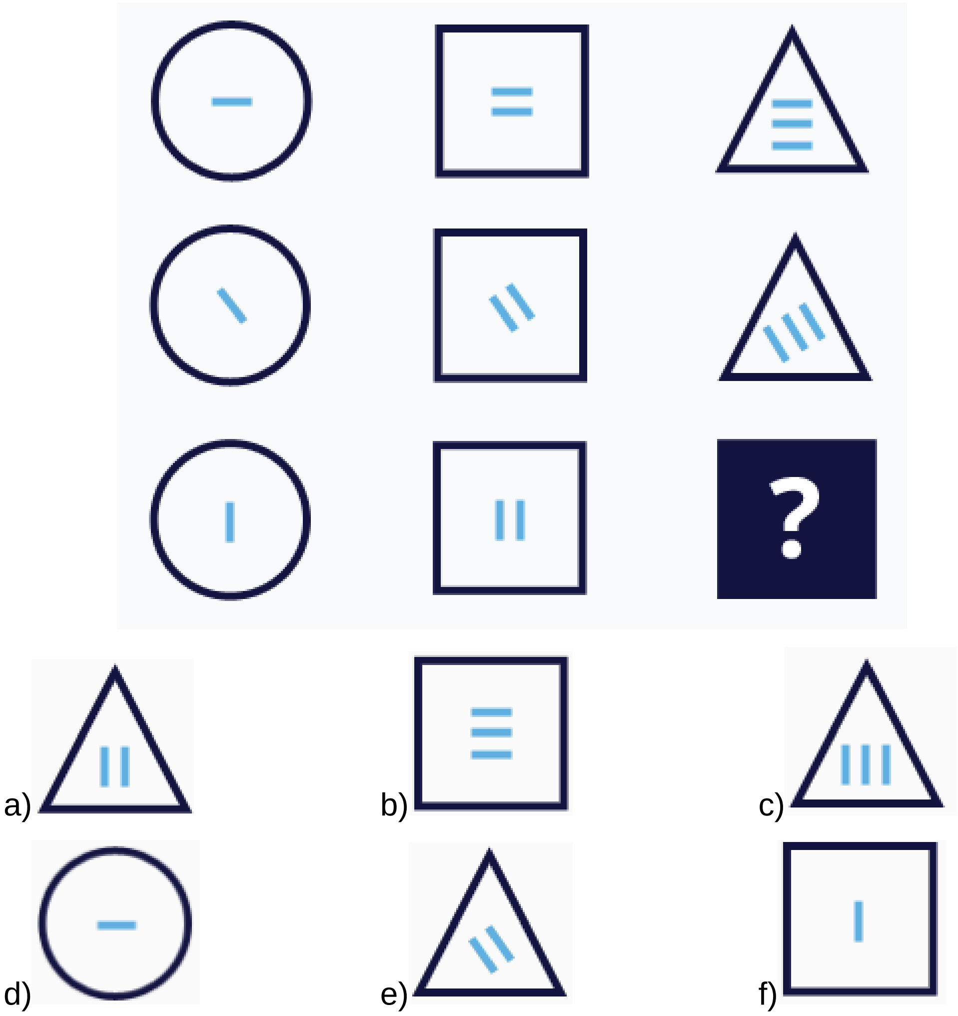


Figura 58: Exemplo 3: Encontrar o próximo elemento da sequência.

Fonte: BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021.

4.

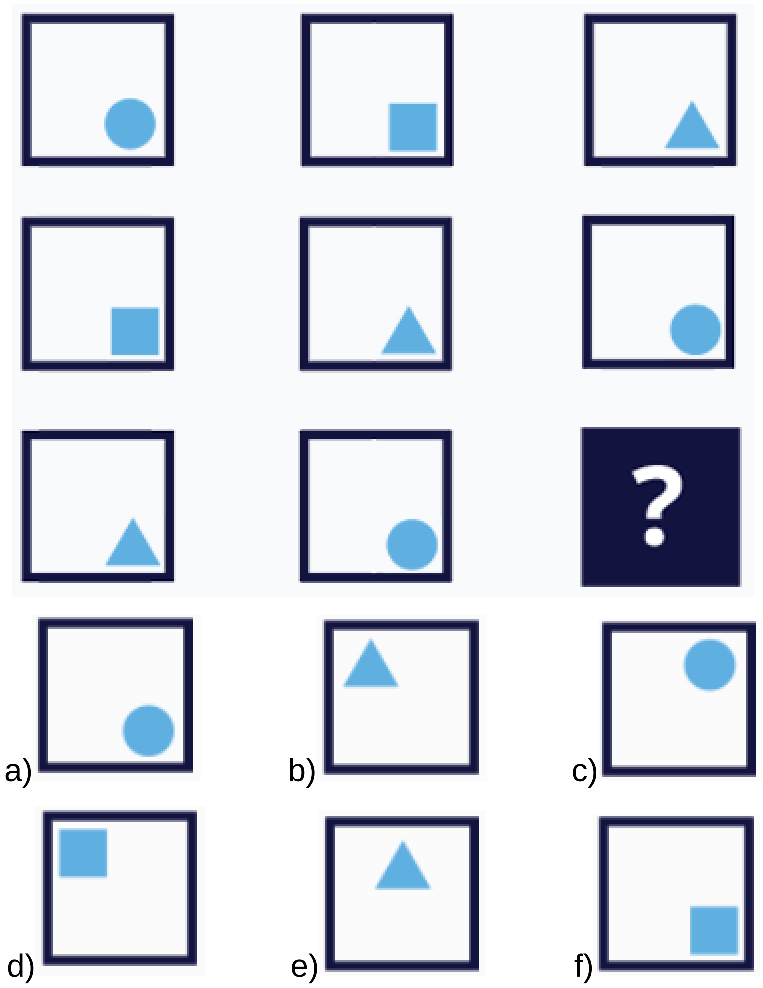


Figura 59: Exemplo 4: Encontrar o próximo elemento da sequência.

Fonte: BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021.

5.

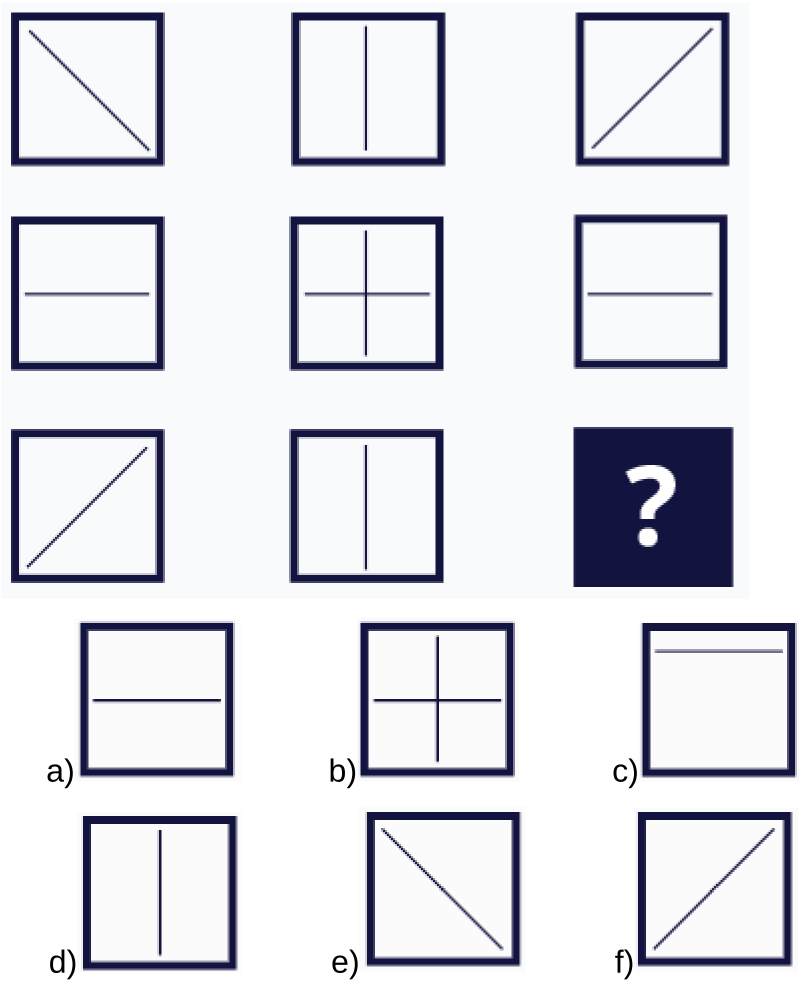


Figura 60: Exemplo 5: Encontrar o próximo elemento da sequência.

Fonte: BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021.

Das sequências acima tem-se:

1. Alternativa correta é a “b”.
2. Alternativa correta é a “e”.
3. Alternativa correta é a “c”.
4. Alternativa correta é a “f”.
5. Alternativa correta é a “e”.

Os alunos serão questionados sobre o padrão que encontraram em cada caso. Será realizado um debate com os alunos, para discutir sobre os padrões encontrados, pois há diferentes percepções e por consequência, há diferentes formas de analisar o padrão.

Acredita-se que os alunos consigam resolver as questões e identificar as sequências sem muita dificuldade. Em seguida será apresentada a definição de sequência,

> 1 Ato ou efeito de seguir.
>
> 2 Continuação de algo iniciado; prosseguimento, seguimento.
>
> 3 Série de acontecimentos que se sucedem ininterruptamente ou a pequenos intervalos.
>
> 4 Disposição das palavras que compõem uma frase.
>
> 5 Parte de um escrito iniciado em outro livro ou em qualquer outro documento.
>
> 6 Em alguns jogos de carteado, série de cartas de valores conseguintes, de naipes iguais ou diferentes.”
>
> (Michaelis, Editora Melhoramentos, 2021)

Após isso, espera-se que os alunos tenham compreendido o conceito básico de sequência. Serão dados os exemplos abaixo para ilustrar algumas sequências numéricas possíveis, para facilitar a compreensão das definições que serão posteriormente apresentadas, já que conceitos como sequência finita e infinita são intuitivos. Inicialmente considerar-se-á que a sequência numérica é o conjunto de números reais dispostos em certa ordem.

1) (1, 2, 3, 4, 6, 12) é a sequência finita dos divisores positivos de 12, dispostos em ordem crescente.
2) (2, 4, 6, 8, …, 2k, …), para todo $k \in$ IN, é a sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 2.
3) (2, 3, 5, 7, 11…) é a sequência infinita dos primos positivos.

Para aprofundar a definição de sequência numérica, será utilizado o segundo exemplo, questionando sobre a semelhança com funções, pois é formada pelas imagens de 1, 2, 3, …, k, … na aplicação f: IN* → IR dada por f(k) = 2k. Logo, será definido sequência numérica,

Sequência numérica é uma função, cujo domínio são os números naturais com exceção do zero.

f: IN* → IR n → f(n) A sequência é formada pelos f(n) dispostos em ordem. f(1), f(2), f(3),....

Presume-se que os alunos consigam compreender o conceito de sequências numéricas sem dúvidas. Em seguida serão usadas as imagens abaixo para ilustrar o conceito de sequências finitas e infinitas. A primeira imagem representa uma sequência finita, ou seja, com uma quantidade finita de termos e a segunda representa uma sequência infinita, com uma quantidade infinita de termos.

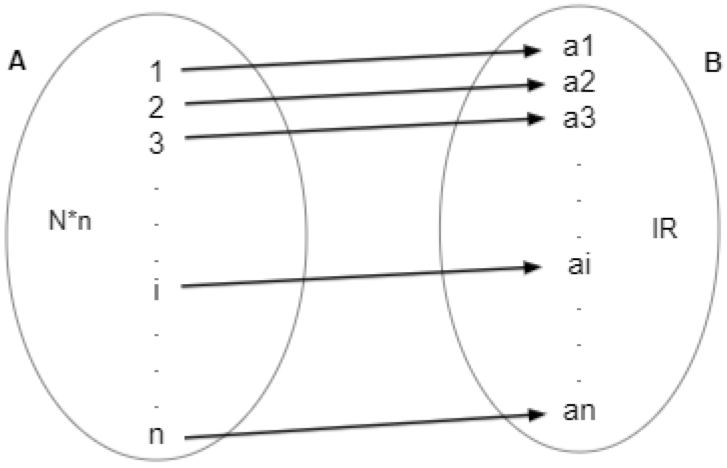


Figura 61: Exemplo 1: Diagrama de uma sequência qualquer.

Fonte: Acervo dos autores.

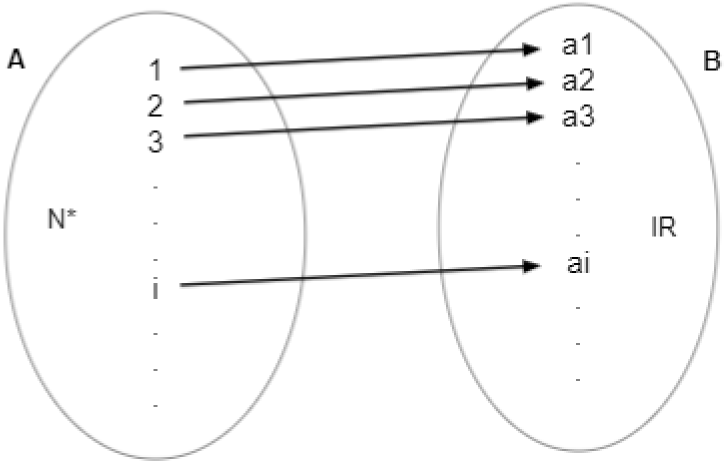


Figura 62: Exemplo 2: Diagrama de uma sequência qualquer.

Fonte: Acervo dos autores.

Dando continuidade, será trabalhado o exercício abaixo que servirá para introduzir o conceito de lei de formação de um termo qualquer de uma sequência.

01. (MatemáticaBasica.net) Determine a soma dos dois próximos termos da sequência com ordem lógica 0, 2, 6, 2, 4, 12, 4, 6, 18, 6, …

Acredita-se que os alunos apresentem dificuldades na resolução do exercício considerando que a sequência dada precisa ser dividida em duas partes. Ainda, presume-se que na resolução as dificuldades sejam sanadas.

Resolução:

Veja que a sequência é formada por múltiplos de 6 e de 2 dispostos da seguinte forma,

- ***Múltiplos de 2 repetidos: 0, 2, _, 2, 4, _, 4, 6, _, 6***
- ***Múltiplos de 6: _, _, 6, _, _, 12, _, _, 18, _, …***

Uma vez percebido essa regularidade é fácil notar que, os próximos números das sequências serão:

- ***Múltiplos de 2 repetidos: 0, 2, _, 2, 4, _, 4, 6, _, 6, 8, _, 8, 10...***
- ***Múltiplos de 6: _, _, 6, _, _, 12, _, _, 18, _, _, 24...***

Assim, pode-se continuar a sequência:

0, 2, 6, 2, 4, 12, 4, 6, 18, 6, 8, 24, 8, 10, 30, 10, 12, 36 …

E observar que os dois próximos números da sequência em questão são 8 e 24. Portanto, 24 + 8 = 32

Após a resolução do exercício, será chamado a atenção dos alunos para o fato, que as sequências costumam possuir uma regra que define os seus elementos. Será retomado os exemplos utilizados anteriormente para uma melhor compreensão. Em seguida será destacado as possíveis formas de obter a lei de formação de uma sequência.

1º caso: Pela fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo a_1 e outra para calcular cada termo a_n a partir do antecessor a_{n-1}.

Será abordado o exemplo seguinte para ilustrar o primeiro caso:

Exemplo: Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$.

Resolução:

Considerando os dados do exercício, pode-se concluir que, a partir de um termo inicial a_1, o sucessor será a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5. Seguindo a fórmula de recorrência, a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8, e assim sucessivamente para os demais termos dessa sequência. Assim, a sequência é $f = (2, 5, 8, \ldots)$.

2º caso: Expressando cada termo em função de sua posição:

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Será abordado o exemplo seguinte para ilustrar o segundo caso:

Exemplo: Escrever a sequência finita f de seis termos, cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$; n ∈ IN

Resolução:

Para a resolução deste exemplo, basta substituir n pelo valor do índice do termo em que se encontra:

$$a_1 = 2^1 = 2 \qquad a_4 = 2^4 = 16$$
$$a_2 = 2^2 = 4 \qquad a_5 = 2^5 = 32$$
$$a_3 = 2^3 = 8 \qquad a_6 = 2^6 = 64$$

Desse modo, a sequência procurada é $f = (2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

Espera-se que os alunos consigam compreender a representação dessa sequência sem dúvidas.

3º caso: Por propriedade dos termos: É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Será abordado o exemplo seguinte para ilustrar o terceiro caso:

Exemplo: Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Resolução:

- $a_1 = 2$ *pois 1 é divisível por {-1,1}.*
- $a_2 = 4$ *pois 2 é divisível por {-2,-1,1,2}.*
- $a_3 = 4$ *pois 3 é divisível por {-3,-1,1,3}.*
- $a_4 = 6$ *pois 4 é divisível por {-4,-2,-1,1,2,4}.*
- $a_5 = 4$ *pois 5 é divisível por {-5,-1,1,5}.*
- $a_6 = 8$ *pois 6 é divisível por {-6,-3,-2,-1,1,2,3,6}*

Presume-se que os alunos possuam dificuldades na criação da sequência, considerando que seus termos não são progressivos.

Será apresentado o exercício abaixo, com intuito de introduzir o conteúdo de Progressão Aritmética:

2. (Unesp - 2012) As medidas dos lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente de razão r.

a) Mostre que as medidas dos lados do triângulo, em ordem crescente, são 3r, 4r e 5r.

Considerando que o exercício se refere a uma Progressão Aritmética e este conceito ainda não foi abordado, será apresentada a definição e posteriormente dar-se-á sequência na resolução.

Dados dois números reais a e r, uma Progressão Aritmética (PA) de primeiro termo a e razão r é uma sequência numérica dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 + r$$
.
.
.
$$a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Assim, uma PA é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Em sequência, será apresentado alguns exemplos onde os alunos serão convidados a identificar o termo inicial a_1 e a razão r,

1. $f = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$
2. $g = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$
3. $h = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$
4. $i = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots)$
5. $j = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \ldots)$

Resolução:

Os termos iniciais e razão em cada caso é:

1. $\boldsymbol{a_1 = 1}$ ***e*** $\boldsymbol{r = 2}$
2. $\boldsymbol{a_1 = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{r = -2}$
3. $\boldsymbol{a_1 = 4}$ ***e*** $\boldsymbol{r = 0}$
4. $\boldsymbol{a_1 = 1/2}$ ***e*** $\boldsymbol{r = 1}$
5. $\boldsymbol{a_1 = 4}$ ***e*** $\boldsymbol{r = -\frac{1}{3}}$

Acredita-se que os alunos consigam compreender o conteúdo de forma intuitiva, identificando o termo inicial e a razão de cada PA, assim, será retomado o exercício 2, resolvendo-o no whiteboard.

Resolução:

a)***Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são três termos consecutivos de uma progressão aritmética crescente, de razão r, então, são do***

tipo: x, $x+r$, $x+2r$, onde $x+2r$ corresponde a hipotenusa do triângulo dado, visto que a hipotenusa tem medida maior do que os catetos. Ao utilizar o teorema de pitágoras tem-se

$$x^2 + (x+r)^2 = (x + 2r)^2.$$

$$x^2 + x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + 4xr + 4r^2$$

$$x^2 - 2xr - 3r^2 = 0$$

Assim, pode-se observar que a resolução desta equação de segundo grau através de bhaskara é inconveniente, pois tornará a questão extensa. Um método alternativo, é utilizar outra maneira de representar a PA. Considerando que a PA tem 3 termos, pode-se utilizar $x - r$, x e $x + r$, com $r > 0$ e $x > r$.

Assim, de acordo com o teorema de Pitágoras tem-se:

$$(x - r)^2 + x^2 = (x + r)^2$$

$$x^2 - 2rx + r^2 + x^2 = x^2 + 2rx + r^2$$

$$x^2 - 4rx = 0$$

$$x(x-4r)=0, \text{ como } x>0$$

$$4rx = 0 \text{ logo } x = 4r.$$

Portanto tais medidas são dadas por: $x - r = 3r$ e $x = 4r$ e $x + r = 5r$

No exercício anterior foi utilizada uma notação diferente da apresentada até o momento, portanto, suponha-se que haja dúvidas dos alunos sobre sua aplicação, assim, serão apresentadas algumas notações especiais para PAs com 3 e 5 termos, ressaltando que se pode continuar a sequência para toda PA com número ímpar de termos.

Para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$. Para 5 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

Após a explicação, caso ainda haja dificuldade na compreensão, o conteúdo será retomado, reforçando que não há diferença nas formas de notação, pois a razão se mantém igual.

Continuando o conteúdo, serão definidas as classificações das PAs.

Crescentes: são as PA em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isto ocorre se, e somente se r > 0, pois:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow a_{n-1} + r - a_{n-1} \Leftrightarrow r > 0.$$

Será dado o exemplo abaixo para ilustrar o caso de PA crescente.

$f = (1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$ onde $a_1 = 1$ e $r = 3$

Decrescentes: são as PA em que cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre se, e somente se r < 0, pois:

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Será dado o exemplo abaixo para ilustrar o caso de PA decrescente.

$g = (0, -1, -2, -3, -4, \ldots)$ onde $a_1 = 0$ e $r = -1$

Constantes: são as PA em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isto só ocorre quando $r = 0$

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Será dado o exemplo abaixo para ilustrar o caso de PA constante.

$h = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$ onde $a_1 = 2$ e $r = 0$

Espera-se que os alunos consigam compreender os exemplos sem dificuldades.

Na sequência, será pedido para que os alunos classificarem as seguintes PAs em crescente, decrescente ou constante:

1. $f = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$
2. $g = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$
3. $h = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$
4. $i = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots)$
5. $j = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \ldots)$

Resolução: 1 e 4 são crescentes, 2 e 5 são decrescentes, 3 é constante.

Por fim, serão resolvidos os seguintes exercícios.

3. (Ufpi - 2009) Se em uma Progressão Aritmética de razão positiva o produto dos três primeiros termos é 384 e a soma é 24, então o quarto termo é:

Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

a) 0

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

Resolução:

Como a soma dos termos é 24:

$$x-r+x+x+r=24$$
$$3x=24$$
$$x=8$$

O produto dos três termos é 384. Substituindo x=8 tem-se,

$$(8-r).8.(8+r) = 384$$
$$(8-r)(8+r)=48$$
$$64-r^2=48$$
$$r^2=16$$
$$r=4$$

A sequência é (4,8,12,16…), logo a_4=16

4. (UDESC - 2014) O perímetro de um terreno triangular cujas medidas dos lados representam a progressão aritmética de termos $x+1$, $2x$ e x^2-5, nessa ordem, é:

a) 26

b) 25

c) 24

d) 28

e) 20

Resolução:

Sabe-se que o $a_3 = a_2 + r$ ***e que*** $a_2 = a_1 + r$***, portanto*** $a_3 - a_2 = r$ ***e*** $a_2 - a_1 = r$***, logo,*** $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

Substituindo os dados do exercício tem-se:

$$\boldsymbol{x^2 - 5 - 2x = 2x - (x+1)}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 5 = x - 1}$$

$\boldsymbol{x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm 5}{2}}$ ***então*** $\boldsymbol{x_1 = \frac{8}{2} = 4}$ ***ou*** $\boldsymbol{x_2 = \frac{-2}{2} = -1}$

Assim, para $\boldsymbol{x = 4}$ ***o perímetro é*** $\boldsymbol{(x+1) + 2x + (x^2 - 5) = (4+1) + (2 \cdot 4) + (4^2 - 5) = 5 + 8 + 11 = 24}$

Espera-se que os alunos tenham conseguido compreender os conteúdos apresentados até o momento e consequentemente chegar às respostas corretas.

Será questionado aos alunos se é possível encontrar um termo qualquer de uma PA, presume-se que respondam afirmativamente, mas que não saibam como proceder. Então, será realizado a dedução da fórmula,

> Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A, e admitindo dados o primeiro termo a_1, a razão r e o índice n de um termo desejado, temos:
>
> $a_1 = a$
>
> $a_2 = a_1 + r$
>
> $a_3 = a_2 + r$ ou $[a_3 = (a_1 + r) + r] = a_3 = a_1 + 2r$
>
> $a_4 = a_3 + r$ ou $[a_4 = (a_1 + 2r) + r] = a_4 = a_1 + 3r$
>
> E então, $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Espera-se que os alunos consigam compreender a dedução da fórmula e se necessário reproduzi-la.

Será aplicado um exercício para fixação do conteúdo:

5. (UEL - 2014) Considere a sequência dos números positivos ímpares, colocados em ordem crescente. O 95º elemento dessa sequência é:

a) 95

b) 131

c) 187

d) 189

e) 191

Resolução:

A sequência dos ímpares é (1,3,5,7,9...), logo $\boldsymbol{a_1 = 1\ e\ r = 2}$

$$\boldsymbol{a_{95} = 1 + 94.2}$$

$$\boldsymbol{a_{95} = 189}$$

Em sequência, os alunos serão instigados a resolver o exercício abaixo, com o objetivo de introduzir o conceito de soma dos termos de uma PA.

1. **(Iezzi - ADAPTADO) Calcular a soma dos 9 termos iniciais da PA (1, 7, 13, ...).**

Resolução 1:

Considerando que cada termo é o termo anterior somado a seis unidades, tem-se que os 9 primeiros termos dessa PA são 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49.

A soma desses termos é,

1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 + 49 = 133

Os alunos serão questionados como fariam para somar muitos termos de uma PA. Presume-se que acreditem que há uma forma mais simples, mas que não saibam como proceder. Diante do exposto, o exercício será novamente resolvido de modo que se desenvolva a fórmula da soma dos termos de uma PA.

Resolução 2:

Inicialmente, observa-se que a soma dos extremos é: 1 + 49 = 50.

Ao somar o segundo e o penúltimo termo tem-se: 7 + 43 = 50.

Esse mesmo processo é válido até encontrar o termo central, que será a metade da soma dos extremos: 25

Portanto tem-se:

1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 + 49 = (1+49)+(7+43)+(13+37)+(19+31)+25 = 50 + 50 + 50 + 50 + 25 = 4.50 + 25 = 4(25.2) + 25 = 8.25 + 25 = 9.25.

Assim, observa-se que 9 é o número de termos somados dessa PA e que 25 é a soma dos extremos dividido por 2. Logo, pode-se inferir que a fórmula da soma finita dos n primeiros termos de uma PA é,

$$s = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Após, os alunos serão questionados se a fórmula e o método de a encontrar também é eficiente para a soma de uma quantidade par de termos de uma PA. O mesmo processo será realizado, para encontrar a soma dos 4 primeiros termos da PA = (1, 3, 5, 7, ...), isto é,

1+3+5+7

Inicialmente, observa-se que a soma dos extremos é: 1 + 7 = 8.

Ao somar o segundo e o penúltimo termo tem-se: 3 + 5 = 8.

Como esta PA possui uma quantidade par de termos, não há um termo central.

Portanto tem-se:

1+3+5+7 = (1+7)+(3+5) = 8 + 8 = 2.8 = 2(1+7) = 16

Assim, observa-se que 8 é a soma do primeiro com o último termo da PA e 2 é a metade da quantidade de termos. Portanto tem-se,

$$s = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Espera-se que os alunos consigam compreender a ideia da fórmula e que possam reproduzi-la caso necessário. A seguir será feito um exemplo com o intuito de fixar o conteúdo:

Exemplo: Qual a soma dos 50 termos iniciais da sequência dos inteiros positivos?

Resolução:

A PA dos números inteiros positivos é: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...). Assim, o termo a_1 = 1, $a_n = 50$ e $r = 1$. Substituindo na fórmula tem-se:

$$\boldsymbol{S_{50} = \frac{50}{2}.(50 + 1) = 25.51 = 1275}$$

Por fim, serão resolvidos os exercícios abaixo para fixação do conteúdo apresentado no decorrer da aula:

2. **(Uel-2009) Considere a sequência (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...), cujos termos são os números inteiros positivos que não são múltiplos de 3. A soma dos quarenta primeiros termos dessa sequência é**

   a) 600

   b) 900

   c) 1200

   d) 1400

   e) 1800

Resolução:

Pode-se dividir em duas PAs de razão 3

$PA_1 = (1, 4, 7, 10, ...)$

$PA_2 = (2, 5, 8, 11, ...)$

Se somar os 20 primeiros termos das duas PAs encontra-se os 40 termos da sequência inicial.

Na PA_1 ***tem-se que*** $a_1 = 1$, $r = 3\ e\ n = 20$. ***Para conseguir aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PA, é necessário encontrar o termo*** a_{20}***:***

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_{20} = 1 + (20-1).3$$

$$a_{20} = 58$$

Substituindo na fórmula da soma dos termos de uma PA.

$$s_n = \frac{((a_1 + a_n).n)}{2}$$

$$s_n = \frac{(1+58).20}{2}$$

$$s_n = 59.10$$

$$s_n = 590$$

Na PA_2 ***tem-se que*** $a_1 = 2$, $r = 3\ e\ n = 20$. ***Novamente, para conseguir aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PA, é necessário encontrar o termo*** a_{20}***:***

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_{20} = 2 + (20-1).3$$

$$a_{20} = 59$$

Substituindo na fórmula da soma dos termos de uma PA.

$$s_n = \frac{((a_1+a_n).n)}{2}$$

$$s_n = \frac{(2 + 59).20}{2}$$

$$s_n = 61.10$$

$$s_n = 610$$

Como dividiu-se a sequência em duas PAs, de 20 termos, basta somar os resultados obtidos ao se calcular a soma dos 20 termos de cada uma das PAs formadas, totalizando os 40 termos da sequência original.

610+590=1200

A alternativa correta é a "c"

3. **(Mackenzie) Numa sequência aritmética de 17 termos, sabe-se que $a_5 = 3$ e $a_{13} = 7$. Então a soma de todos os termos é:**
   a)102
   b)85
   c)68
   d)78
   e) 90

Resolução:

Ao analisar a PA de 17 termos, observa-se que os termos a_5 e a_{13} estão à mesma distância dos extremos iniciais e finais respectivamente, portanto, a soma $a_5 + a_{13} = a_1 + a_{17} = 10$. Assim: $s_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_{17}) = \frac{17.10}{2} = 85$

4. **(Unicamp - 2015) Se (a_1, a_2,..., a_{13}) é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é igual a 78, então a_7 é igual a:**
   a) 6
   b) 7
   c) 8
   d) 9

Resolução:

Sabe-se que a PA possui 13 termos. Substituindo os valores na fórmula:

$$\mathbf{78 = \frac{[\,(a_1 + a_{13}).13]}{2}}$$

$$\mathbf{\frac{(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{78}{13}}$$

$$\mathbf{\frac{(a_1 + a_{13})}{2} = \ 6}$$

Como o a_7 é o termo central, $a_7 = \frac{(a_1+a_{13})}{2}$. Logo, $a_7 = 6$

O próximo exercício será utilizado para introduzir o conteúdo de interpolação aritmética.

5. (Uel) Interpolando-se 7 termos aritméticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma progressão aritmética cujo termo central é

a) 45

b) 52

c) 54

d) 55

e) 57

Resolução:

Inicialmente será apresentado o conceito de Interpolação Aritmética: Fazer uma Interpolação Aritmética é inserir termos entre os números a_1 e a_n de forma que a sequência obtida seja uma PA. O número de termos da PA será o número de termos, mais dois.

Neste exercício deve-se interpolar 7 termos entre 10 e 98, logo tem-se uma sequência de 9 termos, pois além disso, sabe-se que, $a_1 = 10$ e $a_n = 98$. Substituindo na fórmula:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1).r \ \rightarrow\ 98 = 10 + 8r \ \rightarrow\ r = 11}$$

$$\mathbf{a_5 = 10 + 4.11 \ \rightarrow\ 54}$$

$$\textbf{\textit{ou}}\ \mathbf{a_5 = \frac{(a1+a9)}{2} = \frac{(10+98)}{2} = \ 54}$$

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.5.1 Relatório Aula 5

No dia dez de abril de 2021, às 09 horas, iniciou-se a quinta aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), oferecido pelo curso de Licenciatura em matemática da Unioeste - campus de Cascavel. A aula foi ministrada pelos acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin, onde trabalharam o conteúdo de Progressão Aritmética. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando o aplicativo jitsi. Observou-se que houve uma queda considerável no número de alunos presentes na sala ao comparar com as aulas anteriores, mais precisamente, 08 alunos não compareceram na aula.

Nesta aula utilizou-se os softwares:

- Kahoot!, onde foi realizado uma dinâmica que auxiliou na introdução do conteúdo inicialmente abordado.
- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;

O início da quinta aula deu-se por meio da resolução de questões que os acadêmicos deixaram na lista de exercícios da aula anterior, a partir desta resolução, foi relembrado o conteúdo raiz de um polinômio. Em seguida, foi dado prosseguimento ao conteúdo, trabalhando “sequências”.

A apresentação inicial do conteúdo sequências foi dada por meio de uma dinâmica realizada no software Kahoot!. A dinâmica consistia em identificar uma figura que continuaria uma sequência dada. Foi utilizado este método considerando que é de fácil visualização, e que atrai o interesse dos alunos. Foi possível observar que os alunos compreenderam com facilidade o conteúdo apresentado, interagindo conforme era solicitado pelos acadêmicos. Porém, quando apresentado as sequências numéricas, percebemos que os alunos tiveram dificuldade em compreender que possuíam um padrão, o que foi esclarecido por meio de exemplos no decorrer da aula.

Quando foi trabalhado Progressão Aritmética, os acadêmicos optaram por trabalhar alguns exercícios que utilizassem a própria definição de Progressão Aritmética, isso fez com que os alunos, aparentemente compreendessem melhor o conteúdo exposto. Além disso, os acadêmicos ainda optaram por justificar as fórmulas do termo Geral e a soma dos termos de uma PA pois consideraram de grande importância, visto que não há a necessidade de as decorar. Devido a este fato, observou-se que os alunos ficaram com dúvidas que foram sanadas no decorrer da aula.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado, pois não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: sequências finitas e infinitas, lei de formação de uma sequência, progressão aritmética, classificação das progressões aritméticas em crescente, decrescente e constante. Não foi possível trabalhar a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, soma dos termos de uma Progressão Aritmética e interpolação Aritmética, que serão ajustados para serem trabalhados na próxima aula.

Acredita-se que os alunos compreenderam e entenderam o conteúdo aplicado considerando que teve grande participação verbalmente e por escrito no chat, além de comentários que demonstraram o interesse e o desenvolvimento dos alunos no decorrer da aula.

Durante a aula procurou-se dar ênfase nas características de uma sequência e de uma Progressão Aritmética, para isso foram utilizados diversos exemplos e exercícios que auxiliaram na explicação.

Novamente trabalhou-se com exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo as expectativas, onde acredita-se que o conteúdo apresentado foi compreendido pelos alunos e espera-se que o decorrer das próximas aulas ocorra do mesmo modo.

3.6 Plano de aula 6

Conteúdo: Progressão Geométrica

Objetivo geral: Trabalhar o conteúdo de Progressão Geométrica.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com Progressões Geométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma progressão geométrica.
- Diferenciar uma progressão e uma progressão geométrica.
- Encontrar um termo desejado na progressão geométrica.
- Encontrar as somas finita e infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Mentimeter, Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente os alunos serão convidados a resolverem o seguinte exercício:

1. **(Iezzi) Uma empresa produziu, no ano de 1975, 100.000 unidades de um produto. Quantas unidades produzirá no ano de 1980, se o aumento anual de produção é de 20%?**

Acredita-se que os alunos apresentem dificuldades em resolver o exercício, considerando que se trata de um aumento progressivo. O exercício será resolvido e após, será mostrado que a situação apresentada se caracteriza como uma Progressão Geométrica.

Resolucão:

De um ano para o outro há um aumento de 20%, correspondente a 120% do produzido no ano atual, assim, 100% + 20% = 120% = 120/100 = 1.2.

Para encontrar o número de unidades produzidas em 1976, basta multiplicar a quantidade produzida em 1975 por 1,2. Para encontrar a quantidade em 1977, basta multiplicar o valor encontrado de 1976 por 1,2 e assim sucessivamente.

Assim, a quantidade produzida em cada ano será:

1975 = 100000

1976 = 100000 . 1,2 = 120.000

1977 = 120000 . 1,2 = 144.000

1978= 144000 . 1,2 = 172.800

1979 = 172800 . 1,2 = 207.360

1980 = 207360 . 1,2 = 248.832

Em 1980 a empresa produzirá 248.832 unidades deste produto.

Após a resolução do exercício, os alunos serão questionados com a seguinte pergunta: “é possível estabelecer algum padrão no exercício anterior?”

Acredita-se que os alunos consigam relacionar com o conteúdo anterior de Progressão Aritmética onde o sucessor é a soma do anterior com uma razão, porém, observando que nesse caso ocorre uma multiplicação. A partir disso será definida uma Progressão Geométrica.

Dados os números reais a e q, chama-se progressão geométrica (PG) de primeiro termo a e razão q, uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 . q$$

$$a_3 = a_2 . q$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} . q, \ para \ todo \ n \in N, \ n \geq 2$$

Assim, uma PG é uma sequência em que cada termo a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

Será abordado alguns exemplos, onde será questionado sobre o termo a_1e q.

1. PG_1 = (1,2,4,8, 16, ...)
2. PG_2 = $(1, ⅓, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$
3. PG_3 = (7, 7, 7, 7, 7, ...)
4. PG_4= (5,-5,5,-5, 5, ...)
5. PG_5= (3, 0, 0, 0, 0, ...)

Resolução:

Os termos iniciais e razão em cada caso é:

1. ***a_1=1 e r = 2***
2. ***a_1=1 e $r = \frac{1}{3}$***
3. ***a_1=7 e r = 1***
4. ***a_1= 5 e r = -1***
5. ***a_1= 3 e r = 0***

Será observado que nos exemplos apresentados, é possível perceber diferenças significativas. Diante disso, serão definidas as possíveis classificações de uma PG.

- Crescente, em que cada termo da PG é maior que o anterior.
- Constante, em que cada termo da PG é igual ao anterior.
- Decrescente, em que cada termo da PG é menor que o anterior.
- Alternante, em que cada termo da PG tem sinal contrário ao termo anterior.
- Estacionárias, em que o termo $a_1 \neq 0$, e $a_2 = a_3 = \ldots = 0$

Será retomado os exemplos abordados e classificado cada PG em crescente, decrescente, constante, alternante ou estacionária:

1. PG_1 = (1,2,4,8, 16, ...)

2. PG_2 = $(1, ⅓, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ..)$
3. PG_3 = (7, 7, 7, 7, 7, ...)
4. PG_4= (5,-5,5,-5, 5, ...)
5. PG_5= (3, 0, 0, 0, 0, ...)

A PGs 1,2,3,4 e 5 são respectivamente, crescente, decrescente, constante, alternante e estacionária.

Dando continuidade à aula serão feitos os exercícios abaixo.

2. (Iezzi) Qual é o número que deve ser somado a 1, 9 e 15 para que se tenha, nessa ordem, três números em PG?

Para a resolução deste exercício, é necessário utilizar uma propriedade de PG. Conforme for realizada a resolução tal propriedade, será explicado.

Resolução:

Para que (a_1, a_2, a_3) seja uma PG, devemos ter

$a_2 = a_1.q$ ***e*** $a_3 = a_2.q$

Como $a_2 = a_1.q$***, substituindo em*** $a_3 = a_2.q$ ***:***

$a_3 = a_1.q.q \Rightarrow a_3 = a_1.q^2$

Resultando em.

(a_1***,*** $a_1.q$***,*** $a_1.q^2$***) .***

Considerando que o segundo termo é o primeiro multiplicado por uma razão q, e o terceiro termo é o segundo multiplicado pela mesma razão q, ao dividir um termo pelo seu anterior, encontra-se o valor dessa razão. Logo:

- $\frac{a_1.q}{a_1} = q$
- $\frac{a_1 q^2}{a_1 q} = q$

Logo, para que (x+1.x+9, x+15) seja uma PG, $\frac{x+9}{x+1} = q$ ***e*** $\frac{x+15}{x+9} = q$ ***e assim:***

$$\frac{x+9}{x+1} = \frac{x+15}{x+9}$$

Desenvolvendo.

(x + 9)² = (x + 1)(x + 15)

x² + 18x + 81 = x² + 16x + 15

2x = -66

x = -33

3. (Iezzi) Obter o 10º e o 15º termos da PG (1, 2, 4, 8…)

Esse exercício será usado para introduzir o conceito de termo geral da PG.

Resolução:

Tem-se que $\boldsymbol{a_1 = 1}$

$\boldsymbol{a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 . q}$***, portanto*** $\boldsymbol{q = 2}$

$\boldsymbol{a_3 = 4 \Rightarrow a_3 = a_2 . q \Rightarrow a_3 = a_1 . q^2}$ ***seguindo o raciocínio***

$\boldsymbol{a_4 = 8 \Rightarrow a_4 = a_3 . q \Rightarrow a_4 = a_1 . q^3}$

ou seja $\boldsymbol{a_n = a_1 . q^{(n-1)}}$ ***então***

$\boldsymbol{a_{10} = a_1 . q^9 \Rightarrow a_{10} = 1 . 2^9 = 512}$

$\boldsymbol{a_{15} = a_1 . q^{14} \Rightarrow a_{15} = 1 . 2^{14} = 16384}$

Após a resolução do exercício, será definido formalmente como encontrar o termo geral de uma PG.

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma PG e admitindo dados o primeiro termo $a_1 \neq 0$, a razão q ≠ 0 e o índice n de um termo desejado.

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$$

Em seguida, será comentado sobre formas de abordagens para uma PG com 3 ou 5 termos, que podem auxiliar na resolução de exercícios.

Para 3 termos: (x, xq, xq^2) ou $(\frac{x}{q}, x, xq)$.

Para 5 termos: $(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$ ou $(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)$.

Na sequência será resolvido o exercício abaixo, que servirá de introdução para o conceito de soma dos termos de uma PG:

4. (MundoEducação.uol) Considerando a PA de razão 2 e primeiro termo igual a 2, e a PG que possui mesma razão e mesmo primeiro termo, qual a diferença entre o décimo termo da PG e o décimo termo da PA?

a) 20

b) 1028

c) 1208

d) 1228

e) 1004

Espera-se que os alunos consigam diferenciar Progressão Aritmética de Progressão Geométrica e enxergar que se ambas forem crescentes, uma PG cresce consideravelmente mais que uma PA.

Resolução:

Substituindo as informações na fórmula do termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

a_{10} ***= 2 + (10 – 1)·2***

a_{10} ***= 2 + 18***

a_{10} ***= 20***

Substituindo as informações na fórmula do termo geral da PG.

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$$

$$a_{10} = 2 . 2^{(10-1)}$$

$$a_{10} = 2^{10}$$

$$a_{10} = 1024$$

A diferença entre o décimo termo da PG e o décimo termo da PA é:

1024 – 20 = 1004

Do mesmo modo que na PA, será questionado aos alunos se é possível encontrar uma forma de encontrar a soma dos n primeiros termos de uma PG, além de efetuar a soma propriamente dita. Presume-se que acreditem que há uma forma, mas que não saibam como proceder. Diante do exposto, será realizado a demonstração:

Dada uma PG com primeiro termo a_1e razão q, a soma S_n dos n termos iniciais da sequência é:

S_n=a_1+a_2+a_3+…+a_{n-1}+a_n, ou ainda

S_n=a_1+a_1.q+a_1. q^2+…+a_1. $q^{(n-2)}$+a_1. $q^{(n-1)}$

Multiplicando ambos os membros por q.

qS_n=a_1. q+a_1. q^2+a_1. q^3+…+a_1. $q^{(n-1)}$+a_1. $q^{(n)}$

Fazendo qSn – Sn.

$$qS_n - S_n = a_1. q^n - a_1$$
$$S_n(q-1) = a_1. q^n - a_1$$

Considerando q ≠ 1

$$S_n = \frac{a_1. q^n - a_1}{(q-1)}$$

Considerando q ≠ 1 temos:

$$S_n = \frac{a_n. q^n - a_1}{(q-1)}$$

Assim a soma dos n termos iniciais de uma PG é:

$S_n = \frac{a_n.q^n - a_1}{(q-1)}$ ou $S_n = \frac{a_1.q^n - a_1}{(q-1)}$ com (q ≠1).

Espera-se que os alunos consigam compreender a dedução da fórmula e se necessário reproduzi-la, na sequência eles serão convidados a resolver os exercícios:

5. (USP- SP - 2009) A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo e o segundo termo da PG é igual a 3. Nessas condições, determine:

a) A razão da PG.

b) A soma dos três primeiros termos da PG.

Resolução:

a) A soma dos 5 primeiros termos é $\frac{1}{2}$***:***

I) $S_5 = \frac{a_1.q^5 - a_1}{(q-1)} = \frac{1}{2}$

A diferença do sétimo termo e do primeiro termo é 3: $a_7 - a_3 \Rightarrow a_1.q^6 - a_1 q = 3$***.***

Dividindo por q.

II) $a_1.q^5 - a_1 = \frac{3}{q}$

Substituindo II em I.

$$\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}-\mathbf{1})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$q^2 - q - 6 = 0$$

$$q = -2$$

b) substituindo a razão, q=-2, na equação I, o primeiro termo (a_1***) será.***

$$S_5 = \frac{a_1.q^5 - a_1}{(q-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_1.(-2)^5 - a_1}{(-2-1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_1.(-32) - a_1}{-3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-33a_1}{-3}$$

$$\frac{1}{2} = 11a_1$$

$$a_1 = \frac{1}{22}$$

Agora tendo o termo inicial e a razão será possível realizar a soma dos três primeiros termos:

$$S_3 = \frac{a_1.q^3 - a_1}{(q-1)}$$

$$S_3 = \frac{\frac{1}{22}.(-2)^3 - \frac{1}{22}}{(-2-1)}$$

$$S_3 = \frac{\frac{1}{22}.(-8) - \frac{1}{22}}{-3}$$

$$S_3 = \frac{-\frac{8}{22} \cdot -\frac{1}{22}}{-3}$$

$$S_3 = \frac{-9}{22} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{3}{22}$$

6. **(UNIOESTE - 2018) A figura 1 apresenta uma sequência de figuras de bonecos com corpo e pernas no formato retangular e cabeça circular. As dimensões do primeiro boneco são apresentadas na figura 2. (Na figura 2, r é o raio do círculo). Sabe-se que cada uma das medidas do n-ésimo boneco é igual a metade da medida correspondente do (n-1)-ésimo boneco. Assim, se A1 é a área do primeiro boneco, então qual é a soma das áreas dos primeiros 30 bonecos?**

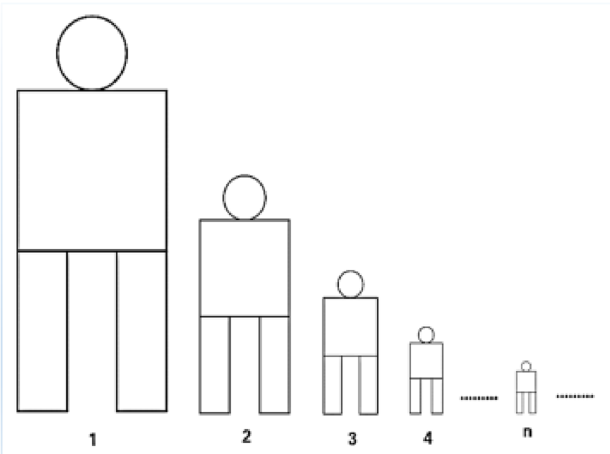


Figura 1

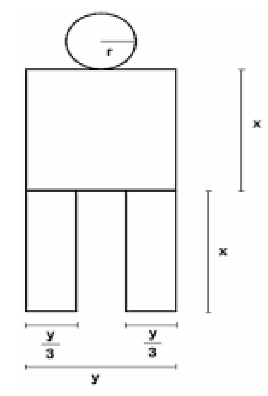


Figura 2

Figura 63: Representação de bonecos formados por figuras.

Fonte: UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Tarde). [S. l.], 2018. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/files/Content/Vestibular_2018/Provas_-_Segunda_Etapa_-_Tarde.pdf. - Acesso em: 4 mai. 2021.

Resolução:

$$\boldsymbol{A_{boneco} = A_{cabeça} + A_{corpo} + 2. A_{perna}}$$

$\boldsymbol{A_1 = \pi. r^2 + xy + 2. x. \frac{y}{3},}$

Como as medidas do segundo boneco são iguais a metade das medidas do segundo tem-se.

$$A_2 = \pi(\frac{r^2}{4}) + \frac{x}{2}.\frac{y}{2} + 2.\frac{x}{2}.\frac{y}{6} = \frac{\pi r^2}{4} + \frac{xy}{4} + 2.\frac{x}{2}.\frac{y}{6} = \frac{1}{4}(\pi.r^2 + xy + 2.x.\frac{y}{3}) = \frac{1}{4}A_1$$

Assim, se cada medida é metade ($\frac{1}{2}$) da anterior, a área de cada boneco é $\frac{1}{4}$ da área do boneco anterior.

Neste caso, as áreas da figura formam uma PG de razão q = $\frac{1}{4}$

A soma dos 30 primeiros termos é.

$$S_n = \frac{A_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

$$S_{30} = \frac{A_1(1 - (\frac{1}{4})^{30})}{(1 - \frac{1}{4})}$$

$$S_{30} = \frac{A_1 \frac{(1 - 4^{30})}{4^{30}}}{(\frac{3}{4})}$$

$$S_{30} = \frac{A_1.}{3} \frac{(4^{30} - 1)}{(4^{29})}$$

O próximo exercício será utilizado como base, e a partir dele será definida a soma dos termos de uma PG infinita com -1 < q < 1.

7. (Iezzi) Calcular a soma das 10 parcelas iniciais da série
1 + ½ + ¼ + ⅛ + …

Resolução:

Na sequência 1 + ½ + ¼ + ⅛ + … q=½ e a_1***=1. Substituindo na fórmula.***

$$S_n = \frac{a_1.q^n - a_1}{(q - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{1.(\frac{1}{2}^{10} - 1)}{(\frac{1}{2} - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{1.(\frac{1}{1024} - 1)}{(-\frac{1}{2})}$$

$$S_{10} = 2(\frac{1023}{1024})$$

$S_{10} = 2(\frac{1023}{1024})$, ***resultado muito próximo de 2***

Espera-se que os alunos percebam que por se tratar de uma PG decrescente de razão ½, a soma dos termos tende a 2, ou seja, quanto mais termos da PG forem somados, o resultado dará mais próximo de 2.

Em seguida, será demonstrado a fórmula da soma infinita dos termos de uma PG:

Uma PG com razão q, com -1 < q < 1, então a soma de seus termos será: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \frac{a_1}{(1-q)}$

Após a explicação, espera-se que os alunos compreendam o conteúdo sem dificuldades. Além disso, será reforçado que ao somar infinitos termos de uma PG com -1 < q < 1, q^n aproxima-se de zero, para isso será ilustrado, através da figura abaixo, uma PG com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Acredita-se que os alunos compreendam o conteúdo proposto sem muitas dúvidas.

1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
6	0,015625
7	0,0078125
8	0,00390625
9	0,001953125
10	0,0009765625
11	0,00048828125
12	0,000244140625
13	0,0001220703125

Figura 64: PG de razão $\frac{1}{2}$.

Fonte: Acervo dos autores.

Os alunos serão convidados a fazer o exercício abaixo.

8. **(UFRGS- aa - 2013) A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é ⅔ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.**

Figura 65: Sequência de triângulos.

Fonte: UFRGS - Matemática. [S. l.], 2013.

A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é:

(A) 9.

(B) 12.

(C) 15.

(D) 18.

(E) 21.

Resolução:

$\boldsymbol{A_1}$ ***é o perímetro do primeiro triângulo. Assim*** $\boldsymbol{a_1 = 1 + 1 + 1 = 3}$

A relação entre os lados é $\boldsymbol{L_n = \frac{2}{3} l_{n-1}}$***. E entre os perímetros?***

$\boldsymbol{P_n = 3l_n = 3(\frac{2}{3} l_{n-1}) = \frac{2}{3}(3l_{n-1}) = \frac{2}{3} P_{n-1}}$***, a relação é a mesma. Assim.***

$$\boldsymbol{a_1 = 3}$$

$$\boldsymbol{a_2 = 3.\frac{2}{3} = 2}$$

$$\boldsymbol{a_3 = 3.(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3}.(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3}}$$

Observa-se, que a soma infinita da PG é.

$$S = \frac{a_1}{(1-q)}$$

$$S = \frac{3}{(1-\frac{2}{3})}$$

$$S = \frac{3}{(\frac{1}{3})}$$

$$S = 9$$

Por fim, será definido o produto dos termos de uma PG.

O produto P_n dos n termos iniciais de uma PG é:

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Na sequência, será feita, no whiteboard, a demonstração da fórmula da seguinte forma.

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_1 . q^2$

.

.

.

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Ao se multiplicar os termos da PG tem-se:

$\boldsymbol{a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_n = (a_1 . a_1 . a_1 . \ldots . a_1)(q . q^2 . q^3 . \ldots . q^{n-1})}$. ***Observe que*** $\boldsymbol{a_1}$ ***é multiplicado n vezes, assim,*** $\boldsymbol{a_1 . a_1 . a_1 . \ldots . a_1 = a_1^n}$***. Como em*** $\boldsymbol{(q . q^2 . q^3 . \ldots . q^{n-1})}$ ***é uma multiplicação de potências de base iguais tem-se*** $\boldsymbol{q^{1+2+3+\ldots+n-1}}$***.***

1+2+3+4+5+...+n-1 é a soma dos (n-1) primeiros termos de uma PA em que $\boldsymbol{a_1 = 1, r = 1}$ ***.***

$$a_1^n . q^{1+2+3+\ldots+n-1} = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Espera-se que os alunos consigam compreender a dedução da fórmula e se necessário reproduzi-la.

Por fim, serão feitos os exercícios:

9. (Iezzi) Na PG (-2, -6, -18, -54, ...) calcule o produto dos 10 termos iniciais.

Resolução:

Tem-se que $\boldsymbol{a_1 = -2, q = 3 \ e \ n = 10}$ ***. Aplicando na fórmula:***

$\boldsymbol{P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ ***da PG (-2, -6, -18, -54, ...) e n = 10***

$$\boldsymbol{P_n = -2^{10} . 3^{\frac{10(9)}{2}} = -2^{10} . 3^{45}}$$

10. (Fuvest) Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a √2. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

a) 12

b) 13

c) 14

d) 15

e) 16

Resolução:

Como $\boldsymbol{q} =. \sqrt{\mathbf{2}}$***:***

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$\mathbf{2^{39} = 1^n . 2^{\frac{n(n-1)}{4}}} \text{ então,}$$

$$\mathbf{2^{39} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}}}$$

Como as bases são iguais é necessário que os expoentes sejam iguais, portanto:

$\mathbf{39 = \frac{n(n-1)}{4}}$ ***então (n-1).n=156***

13.12 =156 então n=13

Espera-se que os alunos, com o conteúdo visto até o momento, sejam capazes de resolver os exercícios sem aparecerem dúvidas em sua resolução.

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.6.1 Relatório Aula 6

No dia dezessete de abril de 2021, às 09 horas, iniciou-se a sexta aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), oferecido pelo curso de Licenciatura em matemática da Unioeste - campus de Cascavel. A aula foi ministrada pelos acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin, onde trabalharam o conteúdo de Progressão Aritmética. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Dulcyene Maria Ribeiro. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando o aplicativo Jitsi Meet. Observou-se que o número de alunos presentes na sala foi o mesmo da aula passada, 08 alunos.

Nesta aula utilizou-se os softwares:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;

A sexta aula foi iniciada com a demonstração da fórmula geral de uma PA. Com a ajuda dos alunos, ocorreu a demonstração do termo geral de uma PA. Após isso, concluiu-se o que foi proposto da aula 5 abordando o tema de soma de termos de uma PA.

Em seguida, iniciou-se os conteúdos preparados no plano de aula 6. Por conta disso, é possível afirmar que o plano de aula foi executado conforme planejado, pois não ocorreram imprevistos fora do conteúdo remanescente da aula 5, o que manteve a execução da aula da maneira prevista. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado progressão geométrica, classificação da PG, fórmula do termo geral de uma PG, algumas de suas notações especiais e soma de termos de uma PG finita, além de termo geral e soma de termos de uma PA, que foram preparados para a aula passada, faltando apenas trabalhar os conteúdos de soma infinita de uma PG infinita e produto de termos de uma PG, que serão ajustados para serem trabalhos na próxima aula.

Acredita-se que os alunos compreenderam o conteúdo exposto, pois houve bastante participação verbal e escrita, além de comentários que demonstraram o interesse e o entendimento dos alunos no decorrer das explicações e resoluções de exercícios.

Novamente trabalhou-se questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo as expectativas. Acredita-se que o conteúdo apresentado foi compreendido pelos alunos e espera-se que o decorrer das próximas aulas ocorra do mesmo modo.

3.7 Plano de Aula 7

Conteúdo: Matriz e determinantes.

Objetivo geral: Definir matrizes, apresentar os tipos de matrizes e as operações com matrizes, apresentar métodos de cálculo de determinantes.

Objetivos específicos: Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma matriz.
- Reconhecer a posição dos elementos e os tipos de matrizes.
- Compreender adição, subtração e multiplicação de matrizes.
- Calcular determinantes de matriz 2×2 e 3×3.
- Saber utilizar as propriedades dos determinantes.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi Meet. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

A aula se iniciará com o questionamento aos alunos: "por que alguns dados são apresentados em tabelas?" Espera-se que os alunos possuam a percepção que os dados são apresentados em tabelas geralmente com o intuito de facilitar a visualização e a organização dos dados. Em seguida será apresentado o texto abaixo:

"Os resultados do aproveitamento escolar de 4 turmas diferentes foram apresentados da seguinte maneira: Turma A: 8 em matemática, 9 em português, 8 em história e 9 em geografia. Turma B: 7 em matemática, 5 em português, 6 em história e 6 em geografia. Turma C: 8 em matemática, 7 em português, 7 em história e 7 em geografia. Turma D: 7 em matemática, 8 em português, 8 em história e 9 em geografia."

Deseja-se que haja a percepção de que os dados estão apresentados de uma maneira que dificulta a visualização e compreensão. Os alunos serão questionados sobre a possibilidade de reorganizar estes dados com o intuito de favorecer a compreensão. Supõe-se que os alunos irão sugerir a representação na forma de tabela, como na imagem a seguir:

Tabela 02 – Informações da turma.

	MATEMÁTICA	PORTUGUÊS	HISTÓRIA	GEOGRAFIA
TURMA A	8	9	8	9
TURMA B	7	5	6	6
TURMA C	8	7	7	7
TURMA D	7	8	8	9

Fonte: Acervo dos autores.

Será introduzido o conteúdo de matrizes a partir da tabela anterior, se estiver implícito o que cada linha e cada coluna significam, pode-se suprimir as escritas “turmas” e “disciplinas” e utilizar apenas as “notas” sem que haja perda de entendimento. Ao realizar este processo tem-se.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{mxn=4x4}$$

Na sequência será apresentada a definição formal de matrizes:

> “Em tabelas como a anterior os números são chamados de elementos. As colunas são numeradas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Essas tabelas formadas por números reais distribuídos em m linhas e n colunas (m,n ≠ 0) são chamadas de matriz m por n (m x n). Geralmente cada elemento da matriz é representado por a_{ij} em que i indica a sua linha e j a coluna à qual o elemento pertence.”

Será apresentado no Microsoft Whiteboard, alguns tipos de matrizes.

- Matriz linha

Como o próprio nome já diz, a matriz possui apenas uma linha, podendo ter várias colunas, como indicado abaixo.

$$A = (a_{11}\ \ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{ij})$$

- Matriz coluna

Semelhante à matriz linha, temos que a matriz coluna possui apenas uma coluna, podendo ter várias linhas.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix}$$

- Matriz nula

Uma matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero, conforme exemplo.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz quadrada de ordem n

É toda matriz do tipo n × n, isto é, uma matriz que tem número de linhas e colunas iguais.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matriz Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos a_{ij}, em que i ≠ j, são iguais a zero.

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- Matriz identidade

Matriz unidade (ou matriz identidade) de ordem n é toda matriz diagonal em que os elementos a_{ij}, em que i = j, são iguais a 1.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Após, será proposto o seguinte exercício:

1. **(UFSM - 2011, Adaptado) O diagrama abaixo representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:**

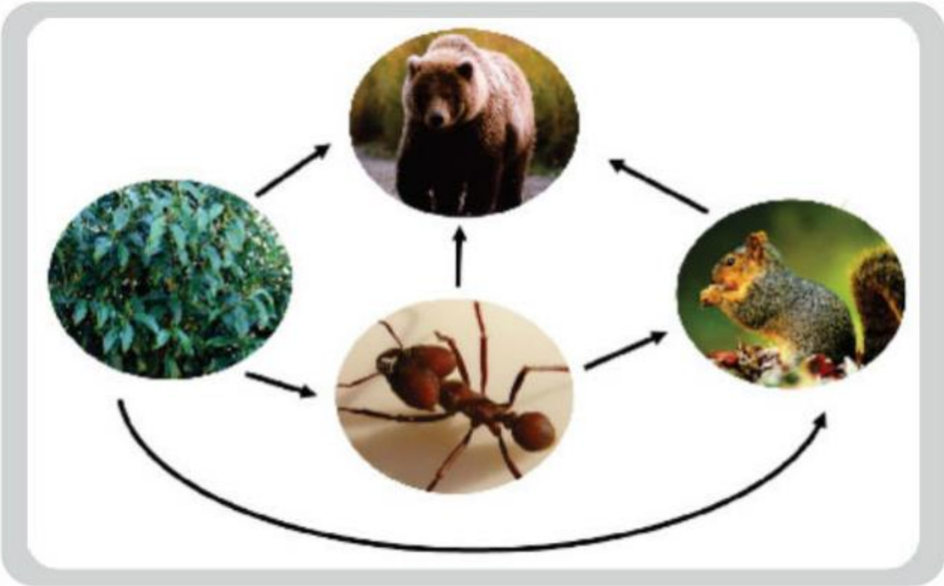


Figura 66: Cadeia alimentar.

Fonte: UFSM – 2011.

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

Figura 67: Representação cadeia alimentar em formato de tabela.

Fonte: UFSM – 2011.

A matriz A, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i \leq j \\ 1, se\ i > j \end{cases}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i = j \\ 1, se\ i \neq j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i \geq j \\ 1, se\ i < j \end{cases}$

d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i \neq j \\ 1, se\ i = j \end{cases}$

e) $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i < j \\ 1, se\ i > j \end{cases}$

Espera-se que os alunos consigam resolver o exercício com base no conteúdo visto até o momento.

Resolução:

Sendo i o número de linhas e j o número de colunas, temos que a matriz A é disposta da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Observando a matriz nota-se que quando o número das linhas (i) é igual ao número das colunas (j), ou quando i é maior que j, $a_{ij} = 0$***. Já as posições ocupadas pelo 1 são aquelas em que j maior que i. Portanto, a alternativa certa é a letra c.***

Em seguida, será apresentado no whiteboard um exemplo de adição e subtração de matrizes, explicando que corresponde à simples soma, ou subtração dos termos correspondentes como no exemplo a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

* $7 + 3 = 10$ * $1 + 4 = 5$ * $2 + 6 = 8$ * $9 + (-5) = 4$

Figura 68: Exemplo de soma de matrizes.

Fonte: Acervo dos autores.

Ainda, será apresentada a multiplicação de matriz por um número real k, que se resume a multiplicar cada elemento da matriz A por k. Por exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

A multiplicação de matrizes será apresentada na sequência. Para trabalhar a multiplicação entre duas matrizes, será utilizado um exemplo a fim de que facilite a compreensão do passo a passo a ser realizado.

A multiplicação entre duas matrizes A e B ocorre obtendo a matriz C=A.B, em que cada termo de C corresponde à soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna B.

Por exemplo, multiplicando A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} e\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- **1º passo:** multiplicamos a primeira linha pela primeira coluna.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C_{11}}{\boxed{1\ .\ (-1) + 2\ .\ 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

Figura 69: Passo 1: multiplicação entre matrizes.

Fonte: BrasilEscola - disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/multiplicacao-matrizes.htm.

- **2º passo:** multiplicamos a primeira linha pela segunda coluna.

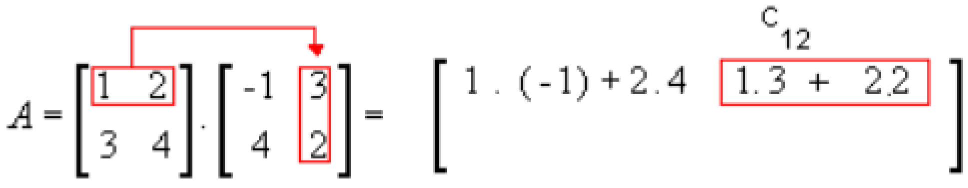


Figura 70: Passo 2: multiplicação entre matrizes.

Fonte: BrasilEscola - disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/multiplicacao-matrizes.htm.

- **3º passo:** Multiplicamos a segunda linha pela primeira coluna.

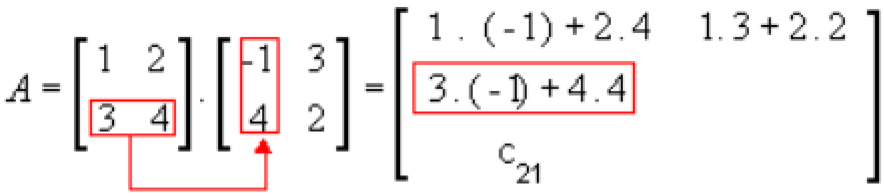


Figura 71: Passo 3: multiplicação entre matrizes.

Fonte: BrasilEscola - disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/multiplicacao-matrizes.htm.

- **4º passo:** Multiplicamos a segunda linha pela segunda coluna.

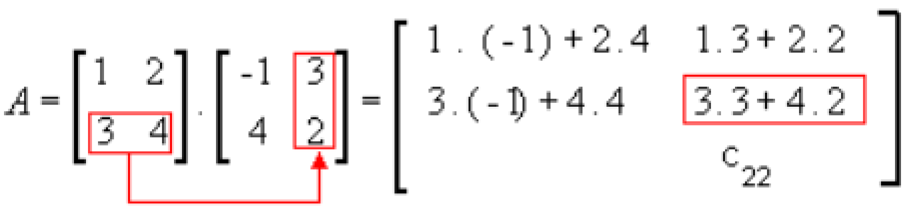


Figura 72: Passo 4: multiplicação entre matrizes.

Fonte: BrasilEscola - disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/multiplicacao-matrizes.htm.

Serão feitas as seguintes observações sobre a multiplicação de matrizes:

1ª) O produto AB é possível somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

2ª) Pela definição o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, então se A é do tipo mxn e B é do tipo qxp, C = AB é do tipo m × p.

É importante notar que, para quaisquer matrizes A e B, não podemos afirmar que AB = BA. Conforme o exemplo seguinte.

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Além disso, temos que se AB = 0 não implica que A = 0 ou B = 0. Conforme o exemplo seguinte.

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para fixar os conceitos abordados no decorrer da aula, os alunos serão convidados a responderem o exercício:

2. **(Unicamp, adaptado) Dada as matrizes:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{16}\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Supondo que, na matriz A, x = -2, calcule B = AC

Resolução:

Como em A x=-2, tem-se que

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{pmatrix}}$$

Inicialmente temos que verificar se a multiplicação de AC é possível, A é uma matriz quadrada 3x3 e C uma matriz coluna 3x1. Considerando que o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz C é possível realizar a multiplicação, por consequência B é 3x1.

$$\boldsymbol{AC = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{AC = \begin{pmatrix} -2.3 + 2.4 + 0.(-1) \\ 2.3 + 4.(-2) + 6.(-1) \\ 0.3 + 6.4 - 32.(-1) \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{AC = B = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{pmatrix}}$$

Considerando que o próximo conteúdo a se trabalhar é determinante, segue as definições válidas nas matrizes quadradas:

- Diagonal principal

Chama-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm **os dois índices iguais**, isto é,

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}$$

- Diagonal secundária

Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices iguais a n + 1, isto é,

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}\}$$

O cálculo do determinante de matrizes de ordem n = 1 e n = 2 pode ser realizado da seguinte forma.

- Se M é de ordem n = 1, então det M é o único elemento de M.

M = (a_{11}), então det M = a_{11}

- Se M é de ordem n = 2, o determinante de M é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária, isto é.

$$\det\ M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Figura 73: Determinante matriz 2x2.

Fonte: MURAKAMI, C.; IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções - Vol. 4 - 8ª Ed. Editora: Atual. 2004.

Será feito o seguinte exercício para aplicar tais conceitos:

3. (FEI - SP) Para que o determinante da matriz A seja nulo, o valor de a deve ser:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}}$$

a) 2 ou -2

b) 1 ou 3

c) 3 ou -5

d) -1 ou 3

e) -5 ou 3

Resolução:

$$\boldsymbol{detA = (1+a)(1-a) - (-1).3}$$

$$\boldsymbol{detA = 1-a^2 + 3 = -a^2 + 4}$$

Como o exercício pede detA = 0:

$$\boldsymbol{-a^2+4=0}$$

$$\boldsymbol{a^2 = 4}$$

Logo a= 2 ou a=-2

O conceito do determinante de uma matriz 3x3 será apresentado por meio do exercício que segue.

4. **(Unicap - PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}-\mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Os alunos serão questionados sobre a resolução deste exercício. É possível que respondam que o cálculo do determinante de uma matriz de ordem $n = 3$ é feito do mesmo modo que o cálculo de determinantes de matrizes de ordem $n = 2$.

Caso ocorra, será explicado que o determinante é a soma de produtos nos quais aparece um, e apenas um, elemento de cada linha e um, e apenas um, elemento de cada coluna e que todos os elementos da matriz devem ser utilizados. Será mostrado que na matriz de ordem $n = 2$, ao realizar a subtração do produto dos termos da diagonal principal pelo produto dos termos da diagonal secundária todos os elementos são utilizados e que se realizar o mesmo processo na matriz de ordem $n = 3$ os termos a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32} não serão utilizados.

Será explicado que um método para encontrar o determinante de uma matriz 3x3 é o método que consiste em copiar as duas primeiras colunas e repeti-las à direita da matriz. Os elementos da diagonal principal e das diagonais a sua direita são multiplicados. O mesmo processo deve ser realizado com a diagonal secundária e as diagonais que estão à sua direita. Então, é realizada a soma dos produtos encontrados na diagonal principal e nas diagonais a sua direita, desta é subtraída a soma dos produtos encontrados na diagonal secundária e das outras diagonais. Isto é, Dado

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det(A)} = a_{11}\,.\,a_{22}\,.\,a_{33} + a_{12}\,.\,a_{23}\,.\,a_{31} + a_{13}\,.\,a_{21}\,.\,a_{32} - -(a_{13}\,.\,a_{22}.\,a_{31} + a_{11}\,.\,a_{23}.\,a_{32} + a_{12}\,.\,a_{21}.\,a_{33})$$

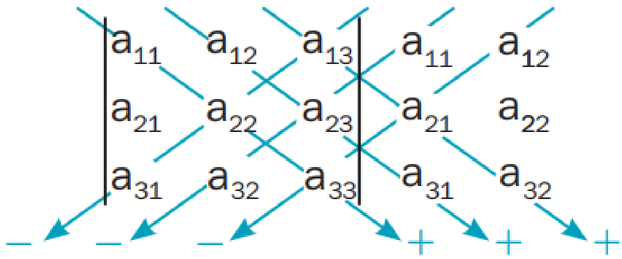


Figura 74: Determinante matriz 3x3.

Fonte: MURAKAMI, C.; IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções - Vol. 4 - 8ª Ed. Editora: Atual. 2004.

Resolução do exercício 4:

$$\boldsymbol{detA = det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix} = 9.(x-7) + 48 + 4x - 54 - 4x - 8.(x-7) = 0}$$

$$\boldsymbol{detA = (x-7) - 6 = 0 \ \Rightarrow x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13}$$

Em seguida, serão apresentadas algumas propriedades do determinante:

- **Fila nula**

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então det M = 0.

- **Multiplicação de uma fila por uma constante**

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número K, o determinante da nova matriz M' obtida será o produto de K pelo determinante de M, isto é, det M' = K.det M.

- **Troca de filas paralelas**

Seja M uma matriz de ordem n ≥ 2. Se trocarmos de posição duas filas paralelas, obteremos uma nova matriz M' tal que det M' = -det M.

- **Filas paralelas iguais**

Se uma matriz M de ordem n ≥ 2 possui duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente iguais, então det M = 0.

- **Filas paralelas proporcionais**

Se uma matriz M de ordem n ≥ 2 tem duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então det M=0

- **Fila escrita como combinação de outras filas**

Se uma matriz quadrada M, de ordem n, tem uma linha (ou coluna) que é combinação de outras linhas (ou colunas), então det M = 0.

Por fim, será resolvido o exercício abaixo com o intuito de fixar o conteúdo apresentado e sanar possíveis dúvidas:

5. (UNESP) Sabendo-se que o determinante associado à matriz:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}}$$

é nulo, concluímos que essa matriz tem:

a) duas linhas proporcionais;

b) duas colunas proporcionais;

c) elementos negativos;

d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas;

e) duas filas paralelas iguais.

Resolução:

Analisando as alternativas separadamente:

a. ***Se a matriz tivesse duas linhas proporcionais o determinante seria nulo, entretanto isso não ocorre na matriz.***
b. ***Se a matriz tivesse duas colunas proporcionais o determinante seria nulo, entretanto isso não ocorre na matriz.***
c. ***Ter elementos negativos não implica em o determinante ser nulo ou não.***
d. ***A primeira coluna é igual a 2 vezes a terceira coluna mais a segunda coluna, então uma coluna é combinação linear de outras duas. Essa é a alternativa correta.***

e. ***Se a matriz tivesse duas filas paralelas iguais o determinante seria nulo, entretanto isso não ocorre na matriz.***

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.7.1 Relatório Aula 7

No dia vinte e quatro de abril de 2021, às 09 horas iniciou-se os trabalhos práticos de Estágio do Curso de licenciatura em Matemática, o qual teve atuação no PROMAT. Estavam presentes na aula os Acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a sétima aula sobre o conteúdo inicial de Matriz e Determinantes. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani. Observou-se que, apenas 8 alunos estavam presentes na aula.

Nesta aula utilizou-se os softwares:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa.

Inicialmente foi retomado o conteúdo de PG por meio de um exercício, em seguida foi dada sequência ao conteúdo de PG, sendo iniciado o conceito de soma infinita de uma PG infinita e o produto de termos de uma PG.

A apresentação do conteúdo de matrizes foi dada por meio de um questionamento: “por que alguns dados são apresentados em tabelas?”. A partir dessa discussão, os acadêmicos explicaram que em uma matriz é uma tabela em que o elemento do cruzamento da linha i com a coluna j corresponde é representado por a_{ij}. Foram apresentados os diversos tipos de matrizes, e as operações possíveis, sempre utilizando exemplos para uma melhor compreensão do conteúdo. Foi possível observar que os alunos compreenderam com facilidade o conteúdo apresentado, interagindo conforme era solicitado pelos acadêmicos. Porém, quando apresentado a multiplicação de matrizes, percebemos que os alunos tiveram dificuldade em compreender quais eram os termos multiplicados, além da dificuldade de identificar a ordem da matriz resultante, as dúvidas e dificuldades foram esclarecidas por meio de exemplos e exercícios no decorrer da aula.

Quando foi trabalhado diagonal principal e diagonal secundária, os acadêmicos optaram por utilizar um exemplo como base, considerando que facilita o entendimento. Ainda, observou-se a dificuldade dos alunos em interpretar a escrita matemática, pois muitos entendiam as definições apenas depois da resolução de exemplos. Acreditamos que essa dificuldade se deve ao fato de não terem compreendido de forma clara sobre os termos de uma matriz e, portanto, pretende-se nas próximas aulas retomar e explicar novamente a formação da matriz.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado, pois não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Do conteúdo previamente planejado foi trabalhado: matriz, tipos de matrizes, operações com matrizes, diagonal principal e diagonal secundária. Do conteúdo previamente planejado, faltou apenas trabalhar determinantes de ordem 2 e 3 que serão abordados no início da próxima aula.

Acredita-se que os alunos compreenderam e entenderam o conteúdo aplicado considerando que teve grande participação verbalmente e por escrito no chat, além de comentários que demonstraram o interesse e o desenvolvimento dos alunos no decorrer da aula.

Durante a aula procurou-se dar ênfase em diferenciar as propriedades das operações com matrizes das propriedades de operações com os números reais, considerando que a multiplicação entre uma matriz A e uma matriz B é diferente da multiplicação de uma matriz B por uma matriz A.

É importante frisar que alguns dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares anteriores da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.

Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo as expectativas. Acredita-se que o conteúdo apresentado foi compreendido pelos alunos e espera-se que as próximas aulas ocorram do mesmo modo.

3.8 Plano de Aula 8

Conteúdo: Equação linear, sistema de equações lineares.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de equação linear e Sistema de equações lineares.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com equações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma equação linear e um sistema linear.
- Compreender quando uma n-upla é a solução do sistema linear.
- Diferenciar um sistema possível de um sistema impossível.
- Diferenciar um sistema possível determinado de um possível indeterminado.
- Identificar e compreender um sistema linear homogêneo.
- Compreender a resolução de um sistema linear pelo método da substituição.
- Compreender a resolução de um sistema linear pelo método de Cramer.
- Compreender a forma gráfica da solução de um sistema linear.
- Interpretar geometricamente sistemas lineares 2x2 e suas soluções.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi Meet. Microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

A aula será iniciada utilizando exemplos para relembrar a definição de equações linear, que corresponde àquelas equações em que as incógnitas possuem grau 1:

Exemplos:

- Equações lineares:

1. $3x + 4y - z - w = 5$
2. $2x - 6y - z = 0$

3. $\frac{x}{2} - 3y = 0$
4. $0x + 0y + 0z = 4$
5. $0x + 0y + 0z + 0w = 0$

- Equações não lineares:

1. $2x^2 + 4y + z = 0$
2. $2xy + z + w = 3$
3. $x + \sqrt{y} - z = 4$
4. $\frac{x}{y} + y$
5. $\frac{3}{x} = 8$

Espera-se que, a partir dos exemplos, os alunos relembrem o conteúdo de equações lineares. Na sequência, será comentado sobre a solução de uma equação linear e como representá-la. Para isso, será dado uma equação linear e então será discutido acerca da quadra que é solução dessa equação da maneira que está descrito abaixo,

- Seja a equação linear:

$$2x + 3y - z + w = 3.$$

1. A sequência (1, 2, 3, –2) é solução pois:

$$2(1) + 3(2) - (3) + (-2) = 3$$
$$2 + 6 - 3 - 2 = 3$$
$$3 = 3$$

A sentença é verdadeira.

2. A sequência (1, 1, 2, 1) não é solução pois:

$$2(1) + 3(1) - (2) + (1) = 3$$
$$2 + 3 - 2 + 1 = 3$$
$$4 = 3$$

A sentença é falsa.

- Seja a equação linear

$$0x + 0y = 0$$

É fácil observar que qualquer dupla ordenada (x_1,y_1) é a solução da equação.

- Seja a equação linear

$$0x + 0y + 0z = 2$$

É fácil observar que nenhuma terna ordenada (x_1, y_1, z_1) satisfaz a equação, pois $0x_1 + 0y_1 + 0z_1 = 2$ é sentença falsa $\forall$ x_1, y_1, z_1.

Será feito o exercício abaixo para introduzir o conceito de sistema linear,

1. **(ENEM – 2000) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:**

a)20.
b)30.
c)40.
d)50.
e)60.

Resolução:

Seja X o número de carros roubados da marca X e Y o número de carros roubados da marca Y.

Como 60% de 150 corresponde a 90 carros temos que:

$$X+Y= 90$$

Além disso temos que o número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, logo:

$$X=2Y$$

Assim temos que, substituindo a segunda equação na primeira:

2Y + Y = 90

Y= 30

Alternativa: B

Estima-se que os alunos consigam perceber que o exercício implica em duas equações com duas incógnitas, onde, foi realizada uma substituição de valores, um método possível para a resolução de um sistema linear.

Será formalizada a definição de um sistema de equações lineares:

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares, por exemplo,

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Além disso, é possível escrever um sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

A solução de um sistema linear nxn, é uma n-upla ordenada de números reais, que satisfaz todas as equações que formam o sistema.

Por exemplo, o sistema do exemplo anterior,

- Admite como solução a terna (3-upla) ordenada (1, 2, 3), pois

$1 + 2 + 3 = 5$ (Sentença verdadeira)

$2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$ (Sentença verdadeira)

$3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4$ (Sentença verdadeira)

- S não admite, porém, como solução a tripla (-5, 11, 0), pois

$-5 + 11 + 0 = 6$ (Sentença verdadeira)

$2. (-5) + 11 - 0 = 1$ (Sentença verdadeira)

$3. (-5) - 11 + 0 = 4$ (Sentença falsa)

Acredita-se que os alunos consigam compreender o conceito de sistema linear, bem como saibam identificar quais n-uplas formam as suas soluções.

Um sistema linear pode ser classificado como possível (SP) ou impossível (SI). Quando o sistema for possível, haverá duas possibilidades: possível determinado (SPD) ou possível indeterminado (SPI),

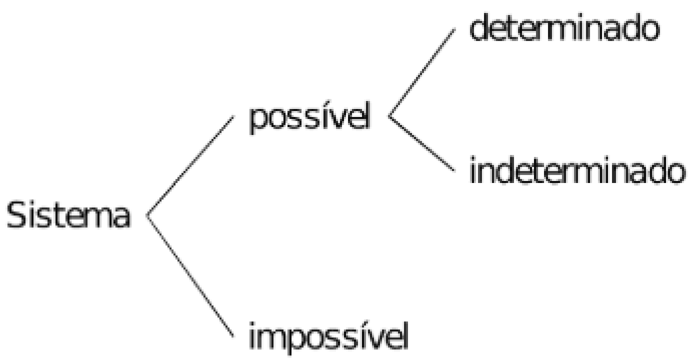


Figura 75: Classificação de um sistema.

Fonte: Site Stoodi - Disponível em: https://www.stoodi.com.br/resumos/matematica/sistemas-lineares/.

Para a fixação do conteúdo abordado, os exercícios abaixo serão resolvidos:

(CPCAR – 2002) Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna abaixo. Numa prova de matemática, um aluno deve responder a 60 itens do tipo verdadeiro ou falso. Para cada item respondido corretamente, o aluno vai ganhar 2 pontos e, para cada item que errar, vai perder 1 ponto. A nota do aluno é função do número de itens que ele acertar. Se o aluno obteve 30 pontos, ele acertou ____ itens.

a) 20

b) 25

c) 30

d) 35

Resolução:

De acordo com o enunciado tem-se que V + F = 60

Para cada item respondido corretamente, o aluno irá ganhar 2 pontos e para cada item que errar perderá 1 ponto.

Se o aluno tirou 30 pontos tem-se:

$$2V - F = 30$$

Assim, tem-se o sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{V + F = 60} \\ \boldsymbol{2V - F = 30} \end{cases}$$

Da equação 1, tem-se que F = 60 – V. Substituindo F na equação 2 tem-se:

$$2V - 60 + V = 30$$

$$3V = 90$$

$$V = 30$$

Na sequência, será disposto as seguintes definições:

- Sistema linear homogêneo:

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele em que o termo independente de todas as equações vale zero.

Exemplos:

$$S_1 = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} 3x + 4y + z - t = 0 \\ 3x - y - 3z \qquad = 0 \\ x + 2y + z - 3t = 0 \\ 4x \qquad - z + t = 0 \end{cases}$$

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a sequência (0, 0, 0, …, 0), que é chamada de solução trivial.

Nos exemplos dados tem-se (0, 0, 0) é solução de S1 e (0, 0, 0, 0) é solução de S2.

Como todo sistema homogêneo admite a solução trivial, então os sistemas são sistemas possíveis. Se o sistema apresentar uma única solução, necessariamente a trivial, o sistema é possível determinado. Caso o sistema apresente alguma solução diferente da trivial, o sistema é possível indeterminado.

Em sequência, serão realizados os exercícios abaixo,

1. **(UNIOESTE – 2018) Existem dois valores reais α_1, e α_2, que a pode assumir de modo que a equação matricial $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita solução não trivial.**

Assim, é CORRETO afirmar que

a)α_1 **e z,** α_2 **e z,** $\alpha_1.\alpha_2$ **= 20**

b)α_1 **e z,** α_2 **e z,** $\alpha_1.\alpha_2$ **= 100**

c)$\alpha_1 \notin$ **z,** α_2 **e z,** $\alpha_1.\alpha_2$ **= 20**

d)α_1 **e z,** α_2 **e z,** $\alpha_1.\alpha_2$ **= 16**

e)α_1 **e z,** α_2 **e z,** $\alpha_1.\alpha_2$ **= 84**

Resolução:

A solução trivial é x = y = 0 Para a solução trivial qualquer valor de alfa irá satisfazer a igualdade matricial. Mas queremos valores de alfa para os quais o sistema tenha solução não trivial.

Desenvolvendo o produto em ambos os lados da igualdade, chegamos em:

$$\begin{cases} 10x + 4y = \alpha x \\ 4x + 10y = \alpha y \end{cases}$$

- ***Assim,***

$$\frac{10x + 4y}{4x + 10y} = \frac{\alpha x}{\alpha y}$$

$$(10x + 4y) \cdot y = (4x + 10y) \cdot x$$

$$10xy + 4y^2 = 4x^2 + 10xy$$

$$4y^2 = 4x^2$$

$$x = \sqrt{y^2}$$

$$x = \pm y$$

- ***Para x = y***

$$10x + 4y = \alpha x$$

$$10y + 4y = \alpha y$$

$$\alpha = 14$$

- ***Para x = -y***

$$10x + 4y = \alpha x$$

$$-10y + 4y = -\alpha y$$

$$\alpha = 6$$

Como o exercício pede o produto desses dois valores:

$$\mathbf{14 \cdot 6 = 84}$$

2. Unioeste (2017) Sobre o sistema de equações lineares é CORRETO afirmar que:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$$

a)possui uma única solução, qualquer que seja β.

b)possui infinitas soluções, qualquer que seja β.

c)possui ao menos uma solução, qualquer que seja β.

d)só tem solução se β = 5.

e)é impossível se β ≠ -5.

Resolução:

Tomando β = 5 temos que o sistema é possível e indeterminado, pois as duas equações serão iguais e teremos na verdade uma equação com 2 incógnitas, acarretando que uma incógnita depende da outra. Assim, o sistema possui infinitas soluções.

Para β ≠ 5 o sistema terá uma única solução. Pretende-se mostrar isso através de gráfico no geogebra com um controle deslizante no lugar do β, conforme consta a figura abaixo.

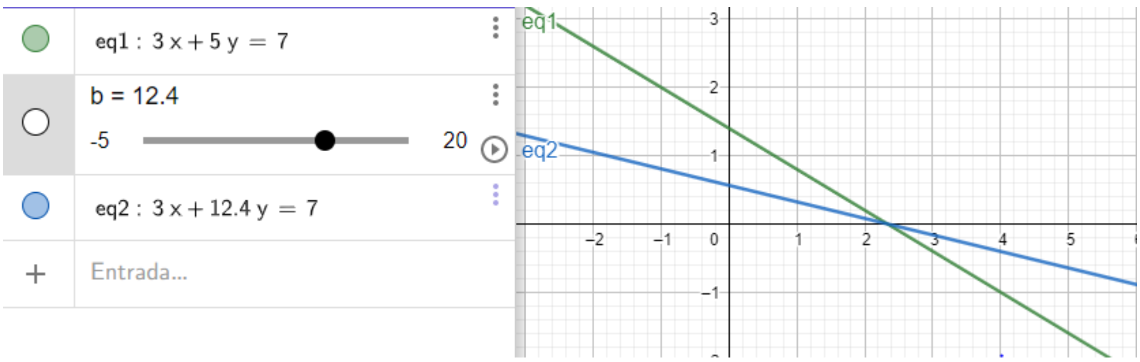


Figura 76: Solução de um sistema de equações 2x2.

Fonte: Acervo dos autores.

O sistema sempre terá solução pois uma equação nunca será combinação da outra já que o coeficiente que acompanha o x e o termo independente são fixos e iguais nas duas equações, portanto, uma não é múltipla da outra.

Objetiva-se com esse exercício mostrar graficamente que quando um sistema admite uma única solução, os gráficos das equações que o compõem se interceptam uma única vez, pois esse ponto é comum às duas equações. Quando o sistema admite infinitas soluções, os gráficos das equações que o compõem são coincidentes e, quando o sistema não admite solução, os gráficos das equações que o compõem são paralelos.

Em seguida será proposto o exercício que se encontra na forma escalonada:

3. Resolva o sistema escalonado:

$$\begin{cases} \mathbf{2x + y - 2z = 10} \\ \mathbf{y + 10z = -28} \\ \mathbf{-14z = 42} \end{cases}$$

Acredita-se que os alunos irão questionar sobre o que é um sistema na forma escalonada, então, será respondido verbalmente que um sistema escalonado ou da forma escada é aquele em que, o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação. Objetiva-se que os alunos consigam perceber que quando um sistema se encontra escalonado é de fácil resolução, pois da última equação temos que:

$$-14z = 42$$

$$z = -3$$

- Agora que encontramos o valor de z, pode-se substituir na segunda equação:

$$y + 10(-3) = -28$$

$$y = 2$$

- Agora substituindo $y = 2$ e $z = -3$ na primeira equação:

$$2x + 2 - 2(-3) = 10$$

$$x = 1$$

Os alunos serão questionados se conhecem mais algum método para a resolução de sistemas lineares. Acredita-se que os alunos não conheçam. Será apresentado o método de Cramer como um método alternativo,

Podemos representar um sistema linear através de uma matriz, diante disso, Cramer desenvolveu um método de resolução de sistemas envolvendo as propriedades dos determinantes.

A regra de Cramer diz que: Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, os valores das incógnitas de um sistema linear são dados por frações, cujo denominador é o determinante da matriz dos coeficientes e os numeradores são determinantes de matrizes obtidas pela substituição de cada coluna da matriz dos coeficientes pela matriz coluna dos termos independentes. Por exemplo,

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + 2z = 12 \\ x - y - 3z = -16 \end{cases}$$

A matriz formada pelos coeficientes é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Então, o $DetA$ = 12 (diferente de zero)

- Seja A_x a matriz obtida substituindo a coluna 1 de A pela matriz coluna dos termos independentes.

$$A_x = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \\ -16 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}\, A_x = 36$$

- Seja A_y a matriz substituindo a coluna2 de A pelos termos independentes

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 1 & -16 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}\, A_y = 48$$

- Seja A_z a matriz obtida Det da matriz substituindo a coluna 3 pelos termos independentes

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det } A_z = 60$$

Assim, o conjunto solução é $S = \{(\frac{36}{12}, \frac{48}{12}, \frac{60}{12})\} = \{(3, 4, 5)\}$.

Caso o determinante da matriz dos coeficientes seja zero, não poderemos resolvê-lo pelo método de Cramer. O sistema será impossível ou possível indeterminado, e não é possível fazer tal distinção utilizando determinantes.

Os exercícios abaixo serão resolvidos para a fixação do conteúdo e sanar possíveis dúvidas,

4. (UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja

a) R$ 30,50.

b) R$ 31,40.

c) R$ 31,70.

d) R$ 32,30.

e) R$ 33,20.

Resolução:

3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z custam R$ 42,10. Assim, tem-se a equação 3x + 7y + z = 42,10

4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z custam R$ 47,30. Assim, tem-se a equação 4x + 10y + z = 47,30

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 7y + z = 42,10} \\ \mathbf{4x + 10y + z = 47,30} \end{cases}$$

Multiplicamos todos os termos da primeira equação por 3 e todos os termos da segunda equação por (-2), tem-se,

$$\begin{cases} \boldsymbol{9x + 21y + 3z = 126,30} \\ \boldsymbol{-8x - 20y - 2z = -94,60} \end{cases}$$

Somando as duas equações encontramos:

x + y + z = 31,7

Logo, a compra de uma lâmpada de cada tipo custa R$ 31,70.

5. (Mauá) Para que valores de K o sistema abaixo é possível e determinado?

$$\begin{cases} \boldsymbol{kx + 3y = 2} \\ \boldsymbol{2x - y = 0} \end{cases}$$

Resolução:

Para o sistema ser possível determinado o determinante da matriz dos coeficientes (A) deve ser diferente de 0, logo temos que:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{DetA = k \cdot (-1) - (3 \cdot 2)}$$

$$\boldsymbol{DetA = -k - 6}$$

Como o exercício pede $\boldsymbol{DetA \neq 0}$***:***

$$\boldsymbol{-k - 6 \neq 0}$$

$$\boldsymbol{k \neq -6}$$

O sistema será possível determinado para todos os valores de $\boldsymbol{k \neq -6}$***.***

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula.

3.8.1 Relatório Aula 8

No dia oito de maio de 2021, às 09 horas, iniciou-se a oitava aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), oferecido pelo curso de Licenciatura em matemática da Unioeste - campus de Cascavel. A aula foi ministrada pelos acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin, onde trabalharam o conteúdo de sistema de equações lineares. A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Pâmela Gonçalves. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando o aplicativo jitsi. Estiveram presentes na sala 08 alunos.

Nesta aula utilizou-se os softwares:

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;
- Geogebra que permitiu trabalhar graficamente na resolução de um exercício de maneira dinâmica.

Inicialmente, foi relembrado o conceito de diagonal principal e secundária para introduzir o conteúdo de determinantes. Após isso, iniciou-se os conteúdos planejados no plano 8. De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado, pois do conteúdo previamente planejado apenas não foi trabalhado a regra de Cramer, que será ajustado para a próxima aula, que será de exercícios.

Acredita-se que os alunos compreenderam e entenderam o conteúdo aplicado considerando a participação verbal e escrita que ocorreu durante a aula.

Durante a aula se procurou dar ênfase na quantidade de soluções de um sistema e na sua representação matricial por meio de ilustrações, exemplos e exercícios.

É importante frisar que a maioria dos exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares. Portanto é possível concluir que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo as expectativas.

3.9 Plano de Aula 9

Conteúdo: Aula de resolução de exercícios

Objetivo geral: Retomar o conteúdo trabalhado ao longo das oito aulas por meio de exercícios.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com estes exercícios, objetiva-se relembrar os conteúdos estudados nas 8 aulas anteriores e ainda que o aluno seja capaz de:

- Utilizar os conceitos aprendidos ao longo das aulas para a resolução dos exercícios.
- Identificar o conteúdo e aplicar os conceitos abordados em aula na resolução de exercícios.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Microsoft Whiteboard, Microsoft PowerPoint, Jitsi, Google Forms, Geogebra, microfone e mesa digitalizadora.

Encaminhamento metodológico:

A nona aula dar-se-á com a resolução de exercícios anteriormente encaminhados como tarefa, os quais contemplam os conteúdos abordados no decorrer das oito aulas anteriores. Será fornecido, por meio do chat, um formulário do Google Forms com os exercícios, para incentivar a participação dos alunos e analisar se o conteúdo abordado foi absorvido e utilizado nas resoluções. Cada questão terá um tempo de cinco minutos para a resolução, incluindo o tempo de encaminhamento pelo formulário da resposta obtida.

Após o tempo disponibilizado para a resolução, as respostas serão analisadas e corrigidas, procurando revisar os conteúdos. Espera-se que os alunos participem ativamente na dinâmica e que consigam resolver os exercícios utilizando os conceitos já estudados.

Os seguintes exercícios compõem o formulário e serão propostos na aula:

1) **(AFA-RJ-2010) Seja o sistema S de equações nas incógnitas x,y e z e parâmetro real m**

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}}$$

Analise as proposições a seguir e assinale a INCORRETA.

a) Se m = -3, então S é impossível.

b) S é determinado se, e somente se, m ≠ 0

c) Se S é homogêneo, então x+y+z é sempre um múltiplo de 3.

d) S admite solução para todo m ≠ -3

Resolução:

É preciso calcular o determinante da matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix}$$

$$detA = -2m + 9 - m - m^2 - 6 - 3 \Rightarrow detA = -m^2 - 3m$$

Para o sistema ser possível e determinado basta o determinante da matriz dos coeficientes ser diferente de 0.

$$det \neq 0 \Rightarrow -m^2 - 3m \neq 0 \Rightarrow -m(m+3) \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \; e \; m \neq -3$$

Então isso significa que o sistema é possível determinado para m≠0 e m≠-3,

Para m=0 e m=-3 o sistema pode possível e indeterminado ou impossível. Não se pode distinguir entre essas duas possibilidades usando apenas esse determinante. É necessário resolver o sistema para esses valores para então poder fazer a distinção.

Para m = -3, tem-se

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 3z = 0 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

Comparando as equações 2 e 3 tem-se que 0 = -3, que é falso, ou seja, o sistema é impossível.

Para m = 0, tem-se

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 0y - 3z = 0 \\ x + 3y - 0z = 0 \end{cases}$$

Neste caso o sistema é homogêneo, logo é possível e indeterminado

x+y+z = 3z-z+z = 3z que é múltiplo de três

Logo ele é possível e indeterminado, pois possui infinitas soluções:

a) Correta.

b) Incorreta.

c) ***Correta, para que S seja homogêneo, obrigatoriamente precisa m deve ser zero, assim considerando o sistema e isolando x na terceira equação se tem: x = 3z. Substituindo x = 3z na primeira equação tem-se 2z=-2y ⇒ z = -y ou ainda y = -z. Assim x+y+z = 3z-z+z = 3z e, portanto, x+y+z é múltiplo de três.***

d) ***Correta, o sistema só é impossível quando m = -3.***

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de sistema de equações, determinante e sistema homogêneo.

2) (UESP) Se o terno (x_0, y_0, z_0) é a solução do sistema abaixo, então 3x_0 + 5y_0 + 4z_0 é igual a:

$$\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

a) -8

b) -7

c) -6

d) -5

e) -4

Resolução:

Será utilizado o método de Cramer:

- ***Determinante da matriz dos coeficientes (A):***

$$det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -7$$

- ***Determinante da matriz substituindo a coluna do x pelos termos independentes (A_x):***

$$det\begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 14$$

- ***Determinante da matriz substituindo a coluna do y pelos termos independentes (A_y):***

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{7}$$

- ***Determinante da matriz substituindo a coluna do z pelos termos independentes*** (A_z)***:***

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \mathbf{-7}$$

Assim, a solução do sistema é: $(\frac{det\ A_x}{det\ A}, \ldots\ldots) = (\mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{1})$

$$x = \frac{det\ A_x}{det\ A} = \frac{14}{-7} = -2$$

$$y = \frac{det\ A_y}{det\ A} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$z = \frac{det\ A_z}{det\ A} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Substituindo os valores encontrados para x, y e z em **3**x_0 **+ 5**y_0 **+ 4**z_0**:**

3.(-2)+5.(-1)+4.1 = -7

Neste exercício, será retomado o conteúdo de solução de um sistema linear e regra de Cramer.

3) (UNIOESTE - 2017) A função definida por f(x)=a(x-1)²+b(x-1)+c, onde a,b e c são constantes reais, representa quanto José tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Assim, x é um número natural tal qual 1≤ x ≤31 e f(x) é o valor, em reais, que José tinha em sua carteira no final do dia x. Da mesma forma, a função g(x)=mx+n onde m e n são constantes reais, representa quanto Paulo tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Sabe-se que no final do primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras. No segundo dia, Paulo tinha R$7,00. No dia 16, José tinha R$120,00. No dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

Com base nestas informações, é correto afirmar que:

a)Ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é S=(-8/15)(x-1)²+23(x-1).

b)Ao final do dia 18 José tinha R$5,00 a mais que Paulo.

c)A expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo tem na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

d)f(x)=$-x^2+32x-31$.

e)Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

Resolução:

Inicialmente será observado que nessas funções o domínio é definido nos naturais e no intervalo [1,31], logo será obtido um gráfico de pontos no plano cartesiano.

José: $f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

Paulo: $g(x) = mx + n$

Para descobrir os valores reais a, b, c, m e n será usado as informações:

Primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras.

José: $0 = a(1-1)^2 + b(1-1) + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1)$

Paulo: $0 = m1 + n \Rightarrow n = -m \Rightarrow g(x) = mx - m$

Segundo dia, Paulo tinha R$7,00.

$g(x) = mx - m \Rightarrow 7 = 2m - m \Rightarrow 7 = m \Rightarrow g(x) = 7x - 7$

Dia 16, José tinha R$120,00.

$f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) \Rightarrow 120 = a(16-1)^2 + b(16-1) \Rightarrow 120 = a(15)^2 + 15b$ ***(01)***

Dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

$0 = a(31-1)^2 + b(31-1) \Rightarrow a(30)^2 + 30b = 0 \Rightarrow 30b = -900a \Rightarrow b = -30a$

Consegue-se obter o b em função de a, então pode-se substituir na equação (01)

$120 = 15.15a + 15(-30a) \Rightarrow 120 = 15a(15-30) \Rightarrow 120/(-15) = 15a \Rightarrow -8 = 15a \Rightarrow a = -\frac{8}{15}$

Como $b = -30a \Rightarrow b = 16$

Conclui-se que as funções que descrevem a quantidade de dinheiro que José e Paulo têm ao final de cada dia é respectivamente.

$f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$

$g(x) = 7x - 7 \Rightarrow g(x) = 7(x-1)$

Após os cálculos, será construído o gráfico no geogebra para os alunos visualizarem a intersecção entre as funções. Em seguida, as alternativas serão analisadas da seguinte forma:

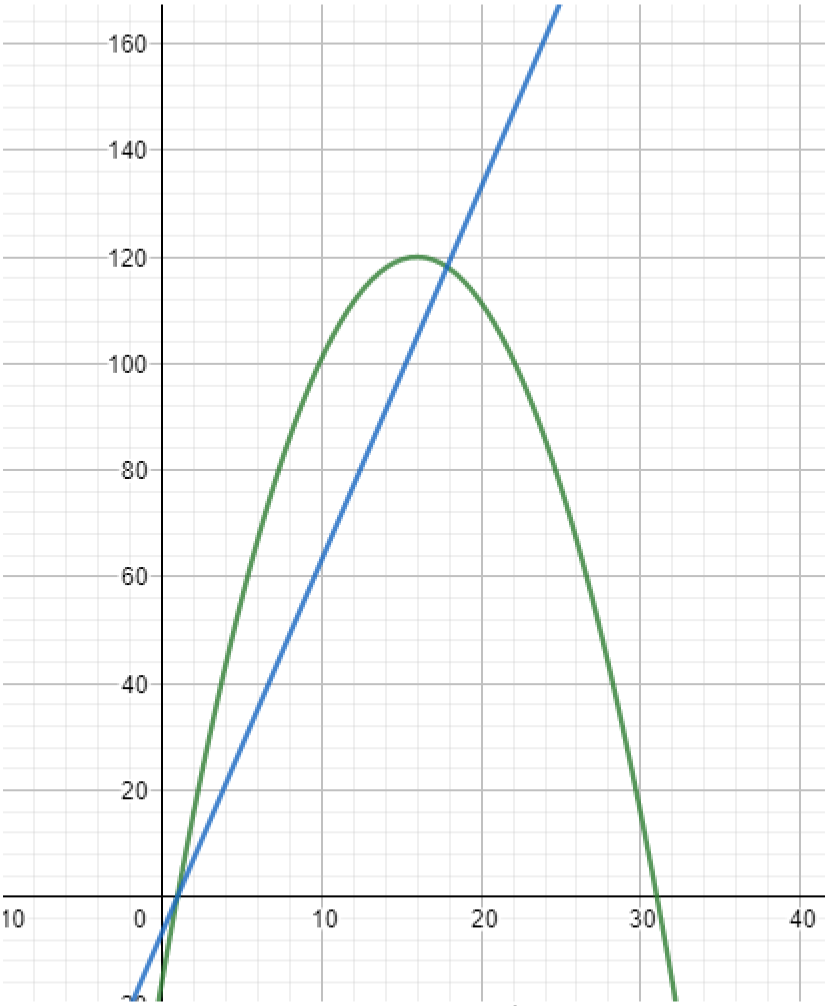


Figura 77: Gráfico de intersecção entre f(x) = $-\frac{8}{15}$(x-1)² + 16(x-1) e g(x) = 7(x-1).

Fonte: Acervo dos autores.

Analisando as alternativas:

a)Ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é S = $-\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1)$.

$f(x) + g(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1) + 7(x-1) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1)$

b)Ao final do dia 18 José tinha R$5,00 a mais que Paulo.

Como a função de José é uma parábola com a < 0 e com raízes 0 e 31, o valor máximo é assumido quando o x = 16, depois disso decresce.

No dia 18 Paulo recebeu g(18)= 7(18-1) $\Rightarrow$ g(18)=119. Como o máximo que José teve em sua carteira é R$ 120,00 no dia 16, é impossível que tenha R$ 5,00 a mais que Paulo no dia 18.

c)A expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo tem na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

d)f(x) = -x² + 32x - 31. Não é verdade, pois f(x) = $-\frac{8}{15}$ (x-1)² + 16(x-1)

e)Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

Como a função de José é uma parábola com a < 0 e raízes 0 e 31, o valor máximo é assumido quando o x = 16, y = 120 e Paulo tinha 100 nesse dia.

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de função afim, função quadrática, raiz de uma função afim, raiz de uma função quadrática, máximo e mínimo de uma função quadrática.

4) (UFRGS - 2020) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo.

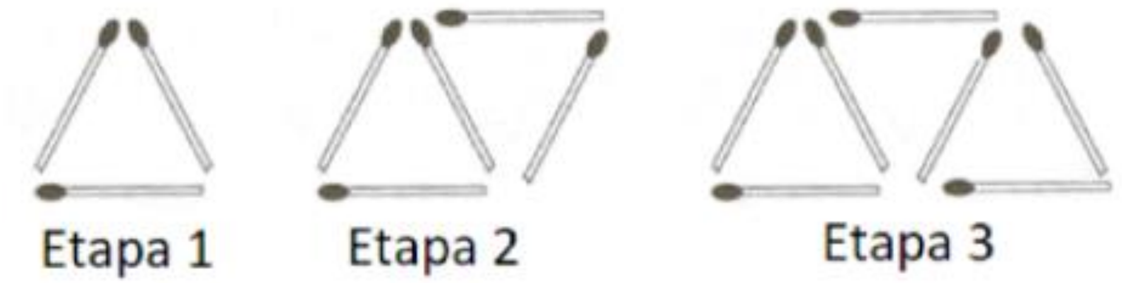


Figura 78: Triângulos formados por palitos de fósforos.

Fonte: UFRGS VESTIBULAR 2020.

Na etapa n, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

(A) 120.

(B) 121.

(C) 122.

(D) 123.

(E) 124.

Resolução:

Tem-se que na Etapa 1 são usados 3 palitos, na Etapa 2 são usados 5, na Etapa 3 são usados 7 palitos, portanto se tem uma PA de razão 2 e o termo inicial 3.

Logo:

a_n ***=*** a_1***+ r.(n-1)***

245 = 3 + 2.(n-1)

245 = 3 + 2n - 2

2n = 244

Logo n = 122

Neste exercício, será retomado o conteúdo de sequências e de progressão aritmética.

5) (UNIOESTE - 2019) Se o número real "a" é raiz do polinômio P(x) e o número real b é raiz do polinômio Q(x), então é CORRETO afirmar que:

a) (a+b) é raiz de P(x)+Q(x).

b) a e b são raízes de P(x)+Q(x).

c) (ab) é raiz de P(x)Q(x).

d) a e b são raízes de P(x)Q(x).

e) (a+b) é raiz de P(x)Q(x).

Resolução:

Como a é raiz de P(x), e b é raiz de Q(x) tem-se que: P(a)=0 e Q(b)=0.

Analisando as alternativas

a)Para avaliar se (a+b) é raiz de P(x) +Q(x) é necessário verificar se ao substituir x por (a+b) encontra-se 0. Não é possível afirmar com as informações do exercício se P(a+b) + Q(a+b) é igual a zero, pois não sabe-se quanto é P(a+b) e/ou Q(a+b) .

b)Para avaliar se a e b são raízes de P(x) + Q(x) é necessário verificar se ao substituir x por a e por b encontra-se 0. P(a) + Q(a) = Q(a), não se sabe quanto é Q(a) P(b) + Q(b) = P(b), não se sabe quanto é P(b).

c) Para avaliar se (ab) é raiz de P(x)Q(x) precisa-se verificar se ao substituir x por (ab) encontra-se 0. Não é possível afirmar com as informações

do exercício se P(ab)Q(ab) é igual a zero, pois não se sabe quanto é P(ab) e/ou Q(ab).

d)Para avaliar se a e b são raízes de P(x)Q(x) precisa-se verificar se ao substituir x por a e b encontra-se 0. P(a)Q(a) = 0.Q(a)= 0, portanto a é raíz de P(x)Q(x). P(b)Q(b) = P(b).0= 0, portanto b é raíz de P(x)Q(x).

e)Para avaliar se (a+b) é raiz de P(x)Q(x) é necessário verificar se ao substituir x por (a+b) encontra-se 0. Não é possível afirmar com as informações do exercício se P(a+b).(a+b) é igual a zero, pois não se sabe quanto é P(a+b) e/ou Q(a+b) .

Portanto, a alternativa correta é a letra d).

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de polinômio e de raíz de um polinômio.

6) (UNESP 2009) Uma rede de comunicações tem cinco antenas que transmitem uma para a outra, conforme mostrado na matriz A=(a_{ij}), onde a_{ij}=1 significa que a antena i transmite diretamente para a antena j e a_{ij}=0 significa que a antena i não transmite para a antena j. Qual o significado do elemento b_{41} da matriz B=A²

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Como b_{41}= 0, isso significa que a antena 4 não transmite para a antena 1.

b) Como b_{41}= 1, isso significa que a antena 4 transmite para a antena 1

c) Como b_{41}= 3 isso significa que existem 3 maneiras diferentes de a antena 4 transmitir para a antena 1, usando apenas uma retransmissão entre elas.

d) Como b_{41}= 3, isso nada significa pois b_{ij} só pode valer 0 ou 1, conforme definido no enunciado da questão.

Resolução:

Primeiro deve-se descobrir a matriz B = A². É necessário descobrir o elemento b_{41}, ou seja, qual é o elemento da quarta linha e primeira coluna da matriz A². Para isso, basta multiplicar a quarta linha de A pela primeira coluna de A.

$$(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1)\ .\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1.0 + 1.1 + 1.1 + 0.1 + 1.1 = 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 3$$

E, portanto, significa que há **3 maneiras diferentes de a antena 4 transmitir para a antena 1, usando apenas uma retransmissão entre elas.**

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de matriz e multiplicação de matrizes.

7) (UNIOESTE - 2015) Andreia usa o salário mensal dela para pagar a prestação da casa, a prestação do carro e o restante guarda no banco para o futuro. No último mês, Andreia observou que do salário mensal dela, um terço mais R$ 200,00 foram usados para pagar a prestação da casa, um terço foi usado para pagar a prestação do carro e um quarto foi guardado no banco. Nessas condições, é CORRETO afirmar que o último salário de Andréia foi de:

a)R$1.800,00.

b)R$2.000,00.

c)R$2.100,00.

d)R$2.400,00.

e)R$2.600,00.

Resolução: Sendo x o salário de Andréa, tem-se que um terço mais R$ 200,00 foram usados para pagar a prestação da casa ($\frac{x}{3}$ ***+ 200), um terço foi usado para pagar a prestação do carro (***$\frac{x}{3}$***) e um quarto foi guardado no banco (*** $\frac{x}{4}$ ***):***

($\frac{x}{3}$ + 200)+ ($\frac{x}{3}$) + ($\frac{x}{4}$) = x

200 = x - $\frac{11}{12}$ ⇒ 200 = $\frac{1}{12}$

Assim, x= R$ 2.400,00

Portanto, o salário de Andreia é R$ 2.400,00

Neste exercício, será retomado o conteúdo equação.

8) (Unicamp) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a)Ache as raízes da equação: det(A) = 0

b)Ache a solução geral desse sistema para λ = -2

Resolução:

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes:

detA= -λ -λ -λ + λ^3+1+1= 0 ⇒ λ^3- 3λ +2 = 0, tem-se então um polinômio de grau 3, onde as possíveis raízes inteiras são -1, 1, -2 e 2, pois são os divisores do termo independente.

Então testando as possíveis raízes tem-se:

- ***λ = 1 é solução pois,***

  1^3- 3.1 +2 = 0
- ***λ = -1 não é solução, pois,***

  $(-1)^3$- 3(-1) +2 = 4
- ***λ = -2 é solução, pois,***

  $(-2)^3$- 3(-2) +2 = 0
- ***λ =2 não é solução, pois,***

  2^3- 3.2 +2 = 4

Dividindo o polinômio por λ - 1 para diminuir um grau, se obtém:

$\lambda^3 \quad -3\lambda \quad +2 \quad | \quad \lambda -1$

$-\lambda^3 \quad +\lambda^2 \quad\quad\quad | \quad \lambda^2+\lambda-2$

$0\lambda^3 \quad \lambda^2 - 3\lambda$

$-\lambda^2 + \lambda$

$0\lambda^2 - 2\lambda \quad + 2$

$+2\lambda \quad -2$

0

Ao aplicar bhaskara em $\lambda^2+\lambda-2$:

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$ ***$\lambda=1$ e $\lambda=-2$, portanto $\lambda=1$ é raiz dupla.***

b) Como foi encontrado $\lambda=-2$, tem-se que esse é um dos valores que zera o determinante, então ou o sistema é possível e indeterminado ou é impossível, porém este sistema é homogêneo para $\lambda=-1$ e como sistemas homogêneos são sempre possíveis, conclui-se que o sistema é um sistema possível e indeterminado,

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

Isolando x na última equação tem-se $x=2z-y$

Substituindo $x=2z-y$ na segunda equação:

$2z-y-2y+z \Rightarrow z=y$

Como $z=y$ e $x=2z-y$, então $x=z$, logo $x=y=z$

S=$\{(x,x,x), \forall\, x \in \mathbb{R}\}$

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de sistema de equações, determinante, sistema homogêneo e solução de um sistema linear, divisão de polinômios, raiz de polinômios, raiz de função quadrática.

9) (FUVEST) Considere o sistema de equações nas variáveis x e y, dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + 2m^2y = 0} \\ \mathbf{2mx + (2m-1)y = 0} \end{cases}$$

Desse modo:

a) Resolva o sistema para m = 1.

b) Determine todos os valores de m para os quais o sistema possui infinitas soluções.

Resolução:

a) Se m=1:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 0} \\ \mathbf{2x + y = 0} \end{cases}$$

Isolando y na 2ª Equação y = -2x

Substituindo na 1ª equação, tem-se que 4x – 4x = 0 ⇒ 0 = 0

S={(x,-2x) $\forall\ x\ \mathcal{E}\ \mathbb{R}$***}***

b) O sistema possui infinitas soluções se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero (note que o sistema é homogêneo. Seja A a matriz dos coeficientes,

Det(A) = 4(2m-1)- 4m³ = 4m³- 8m – 4 = (-4)(m³ - 2m + 1) = (-4)(m-1)(m²+m-1) = 0

Logo:

$$\boldsymbol{m = 1\ ou\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ou\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de solução de um sistema linear, determinante e sistema homogêneo.

10) (UEDC-2017) O resto da divisão de $2^{64} + 1$ por $2^{32} + 1$ é igual a:

a)1.

b)0.

c)4.

d)2.

Resolução:

Pode-se escrever $2^{64} + 1$ da forma $(2^{32})^2 + 1$. Chamando $2^{32} = x$, como artifício para facilitar a resolução, tem-se então uma divisão entre os polinômios $x^2 + 1$ e $x + 1$, logo:

$$
\begin{array}{ccc|c}
x^2 & & +1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & x-1 \\ \cline{1-2}
0 & -x & +1 & \\
 & +x & +1 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & +2 &
\end{array}
$$

Portanto o resto é 2.

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de divisão de polinômios.

11) (Enem - 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra,

em exatamente 20 andar0es, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares deste edifício?

a) 40

b) 60

c) 100

d) 115

e) 120

Resolução:

As interseções dos andares de João e Pedro formam a seguinte P.A. (1,7,13…a_{20}). sendo a_{20} o vigésimo andar coincidentes, com razão 6 e primeiro termo 1. Usando o termo geral da P.A, $a_n = a_1 + (n-1).r$,

$$a_{20} = 1 + (20-1).6$$

$$a_{20} = 115$$

Portanto, há 115 andares neste edifício.

Neste exercício, será retomado o conteúdo de progressão aritmética.

12) (FGV - SP Administração 2013/2) Ao cobrar dos produtores um imposto de t reais por unidade vendida de um produto, o número x de unidades vendidas mensalmente é dado por x = 50-0,25t. A receita tributária mensal (imposto por unidade vezes a quantidade vendida) máxima que o governo consegue arrecadar é:

a) R$ 2200,00

b) R$ 2300,00

c) R$ 2400,00

d) R$ 2500,00

e) R$ 2600,00

Resolução:

Como é pedido a receita tributária máxima, é preciso encontrar o valor máximo da função t.x = t.(50-0,25t) = 50t -0,25t² = -0,25t²+50t

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow Yv = -\frac{b^2 - 4ac}{2a} \Rightarrow Yv = \frac{-[(50)^2 - 4(-0,25).0]}{4\,(-0,25)} \Rightarrow Yv = \frac{-2500}{-1}$$

$$\Rightarrow Yv = 2500$$

Assim, a receita tributária máxima é de R$ 2500,00

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de função quadrática e máximo e mínimo de uma função quadrática.

13) (MAPOFEI-76) Ao se efetuar a soma de 50 parcelas em PA 202, 206, 210, …, por distração não foi somada a 35ª parcela. Qual foi a soma encontrada?

Resolução:

Sabe-se que: a_1 = 202   r = 4   n = 50

Para efetuar a soma das 50 parcelas usaremos a fórmula:

$$S_n = na_1 + [n(n-1)].\frac{r}{2}$$

$$S_{50} = 50.202 + \frac{50.49.4}{2} = 10100 + 4900 = 15000$$

***Para encontrar o* 35º termo que não foi somado, é preciso usar a fórmula do termo geral:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{35} = 202 + (35 - 1).4 = 338$$

***Então a soma total menos a* 35ª parcela é:**

15000 - 338 = 14662

Neste exercício, será retomado o conteúdo de progressão aritmética.

14) (FATEC- SP - 2010) - Considere as funções f e g, de IR em IR, definidas por f(x)= -x² + px e g(x)= k, com p e k constantes reais. Representando-as graficamente no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, obtém-se a reta da função g tangenciando a parábola da função f, no vértice de abscissa 3. Nestas condições, o valor de k é:

(A) 1.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 7.

(E) 9.

Resolução:

Note, primeiro, que as raízes da função f são x = 0 ou x = p:

$f(x) = -x^2 + px \rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(p-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = p$.

O enunciado diz que a reta da função g tangencia a parábola da função f no vértice de abcissa 3. A abscissa do vértice em uma função do segundo grau é dada por $-\frac{b}{2a}$. Ou seja, o seu vértice é dado por: $-\frac{p}{-2} = 3 \Rightarrow p = 6$

Sabendo que a função $g(x) = k$ é uma função constante, o seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x, passando por $y = k$. Para saber onde essa reta corta o eixo y (k), basta encontrar a ordenada referente à abcissa 3. Isso se faz substituindo o valor 3 na lei da função que foi dada no exercício:

$f(3) = -(3^2) + p.3 \rightarrow f(3) = -9 + p.3 \rightarrow f(3) = -9 + 6.3 = -9 +18 = 9$

Logo, a resposta correta é a alternativa (E)

Será feito o gráfico para ilustrar o problema.

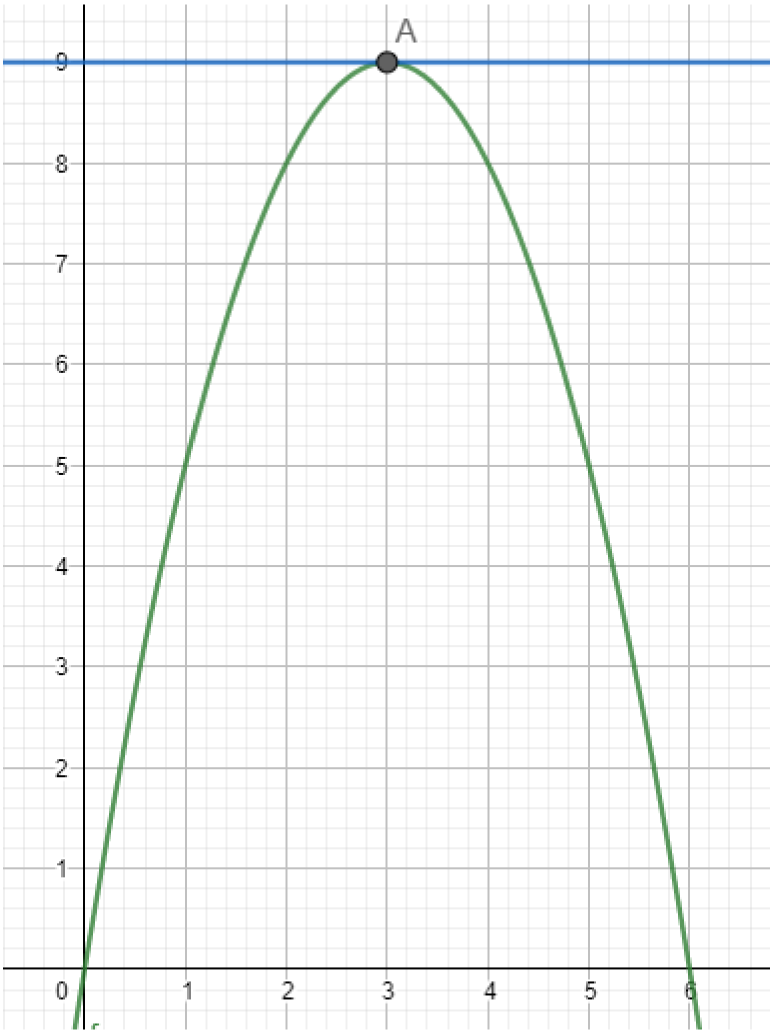


Figura 79: Gráfico de ilustração do problema.

Fonte: Acervo dos autores.

Neste exercício, serão retomados os conteúdos de função quadrática e máximo e mínimo de uma função quadrática, função constante, gráfico de função constante.

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nas respostas obtidas pelo formulário e pelos questionamentos feitos pelos professores no decorrer da aula.

3.9.1 Relatório Aula 9

No dia quinze de maio de 2021, às 09 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado I, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula voltada para resolução de exercícios.

A aula foi acompanhada na íntegra pela professora Fabiana Magda Garcia Papani. A aula foi ministrada de modo virtual, utilizando a plataforma jitsi meet. Observou-se que houve apenas 6 alunos presentes nesta aula, uma grande diferença se comparados com o número de alunos das primeiras aulas ministradas.

Nesta aula foram utilizados os softwares.

- Powerpoint para a projeção do texto elaborado para a aula online;
- Whiteboard, que auxiliou na explicação, por possibilitar escrever simultaneamente com o explicado, similar ao realizado no modo presencial, quando se usa a lousa;
- Google Forms, que permitiu que os alunos participassem da aula de maneira dinâmica.

A aula foi iniciada com o conteúdo de regra de Cramer. Após isso, iniciou-se as atividades elaboradas no plano 9. Para esta aula, foi planejado propor diversos exercícios aos alunos para retomar os conteúdos vistos ao longo das oito aulas do PROMAT. Para cada exercício foi destinado alguns minutos para os alunos resolverem. Foi explicado para eles como aconteceria a dinâmica da aula: que consistia em os alunos responderem os exercícios e encaminhar a resposta obtida pelo formulário do Google Forms, disponibilizado durante a aula. Após o final do tempo, eram observadas as respostas obtidas e o conteúdo abordado no exercício era retomado e relembrado com os alunos.

Em decorrência da aula ter poucos alunos presentes, ocorreram poucas participações, porém, pode-se afirmar que todos os presentes participaram por voz ou por chat. Acredita-se que por ter sido uma aula voltada a resolução de exercícios, houve mais participação.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado. Porém não foi possível abordar todos os exercícios do plano. Dos exercícios previamente planejados, foram trabalhados os sete primeiros exercícios, de um total de dezesseis exercícios.

Durante a resolução dos exercícios se procurou dar ênfase nos conteúdos abordados nas aulas anteriores, para que fosse possível relembrar os conteúdos. Todos os exercícios propostos nesta aula tinham como objetivo verificar se os alunos compreenderam os conceitos apresentados ao longo das oito aulas de PROMAT.

Pelo fato de as aulas serem remotas, os exercícios propostos em sala nas aulas anteriores foram feitos juntamente com os acadêmicos, não tendo um tempo exclusivo para o aluno tentar resolvê-lo, porém, como esta aula foi exclusiva para resolução de exercícios, os alunos tiveram cerca de cinco minutos para resolver cada um dos exercícios propostos.

É importante ressaltar que quase todos os exercícios abordados durante o decorrer da aula são questões de vestibulares. Pois, como o PROMAT 2021 é com foco no vestibular da UNIOESTE, foi dado preferência para exercícios deste nível.

Conclui-se que a aula ocorreu de maneira dinâmica e que a participação dos alunos respondendo o questionário foi muito importante para isso. Acredita-se também, devido às respostas obtidas, que os alunos compreenderam os conteúdos abordados durante o PROMAT.

4 PROMAT - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para uma atuação eficaz, é indispensável que o professor de matemática tenha a capacidade de planejar, elaborar, executar e propor ações que auxiliem o processo de ensino-aprendizagem do aluno. Para isso é preciso que o professor seja capaz de enfrentar desafios, decifrar a realidade e construir propostas criativas, o que requer um bom planejamento.

No estágio supervisionado deve-se realizar a associação entre a prática e a teoria, mas, muitas vezes, a realidade da prática não condiz com o esperado pela teoria. Especialmente se considerarmos o momento de isolamento social que é vivido pela sociedade, em decorrência da pandemia ocasionada pelo COVID-19. Nesse âmbito, a sala de aula física foi transformada em uma sala de aula virtual, o que trouxe desafios para todos, especialmente para os educadores que estão iniciando a sua prática docente.

É imprescindível que ministrar as aulas no PROMAT foi de suma importância para o nosso aprendizado, pois tivemos nosso primeiro contato na perspectiva de professor. Aprendemos a lidar com ocasiões inesperadas e com situações estressantes, pois um bom professor deve estar preparado e saber como agir em qualquer situação desafiadora.

Por fim, destaca-se que a realização do PROMAT foi gratificante, mostrando que a experiência vivenciada agregou valores e conhecimentos e contribuiu para o aperfeiçoamento profissional, além de crescimento na formação acadêmica.

5 REFERÊNCIAS

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática.** Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br. Acesso em: 05 set. 2021.

PONTES, Edel Alexandre Silva. **MÉTODO DE POLYA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. HOLOS**, [S.l.], v. 3, p. 1-9, dez. 2019. ISSN 1807-1600. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/6703>. Acesso em: 08 set. 2021.

METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - Maria Teresa Carneiro Soares (UFPR) e Neuza Bertoni Pinto http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf

ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores.** *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* [S.l.], v. 11, p. 79-97, 2007. Disponível em: <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=28 indice >.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

THOMPSON, A. G. **Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs**. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). The teaching and assessing of mathematical problem solving. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

Lester, F. (1994). **O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular**, p(13-31).

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática.** Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

DANTE. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, C.; IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções** - Vol. 1 - 9ª Ed. Editora: Atual. 2013.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Função inversa"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-inversa.htm. Acesso em: 23 fev. 2021.

Só Exercícios. [S. l.], 2013. Disponível em: https://soexercicios.com.br/. *Acesso em: 23 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [*S. l.*], 2014. Disponível em:https://www.unioeste.br/cogeps/arquivos/vestibular/2014geral/030.pdf. *Acesso em: 27 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova do Segundo Dia. [*S. l.*], 2015. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2015/017a.pdf - *Acesso em: 26 abr. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [*S. l.*], 2016. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/arquivos/vestibular/publicacoes/2016/007.pdfa_tarde.pdf. *- Acesso em: 23 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [*S. l.*], 2017. Disponível em:https://www.unioeste.br/portal/images/vestibular2017/provas/provas-segunda-etapa-.pdf *- Acesso em: 25 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Tarde). [*S. l.*], 2018. Disponível em: *https://www.unioeste.br/portal/images/files/Content/Vestibular_2018/Provas_-_Segunda_Etapa_-_Tarde.pdf. - Acesso em: 27 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Tarde). [*S. l.*], 2019. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/ingresso/vestibular2019/gabarito-provas/provasdasegundaetapa-tarde.pdf. *- Acesso em: 23 fev. 2021.*

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Tarde). [*S. l.*], 2020. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/arq/files/vestibular2020/Prova_da_segunda_etapa_tarde.pdf. *- Acesso em: 23 fev. 2021.*

UFRGS - Matemática. [S. l.], 2011. Disponível em: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/Matemtica2011.pdf/view- Acesso em: 25 fev. 2021

UFRGS - Matemática. [S. l.], 2013. Disponível em: http://www.ufrgs.br /coperse/provas-e-servicos/Matemtica2013.pdf/view - Acesso em: 25 fev. 2021.

UFRJ - Matemática [S. I], 2016. Disponível em: https://www.vestibular.uerj.br /wp-content/uploads/2019/03/2016_1eq_prova.pdf - Acesso em 26 fev. 2021

FANEMA - [S.I.]. Disponível em: https://s4.static.brasilescola.uol.com.br/ vestibular/arquivos/-5c065fd4d4c62.pdf - Acesso em 02 mai. 2021.

PIRES, Vanessa da Silva. Aula de Polinômios, p. 3. Disponível em: http://matinterdisciplinar.pbworks.com/w/file/fetch/88827266/Plano%20de%20aula%20polin%C3%B4mios.pdf. Acesso em: 25 fev. 2021

Educa mais Brasil. [S. l.]. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br Acesso em: 25 fev. 2021.

Mundo Educação. [S. l.]. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br. Acesso em: 4 mai. 2021.

BRAIN METRICS INITIATIVE. IQ research - Personality & Inteligence Assesment Tools, 2021. Disponível em https://staging.bmi-iqtest.com/take-the-iq-test-now/?user_lang=pt# - Acesso em: 10 mar. 2021

SEQUÊNCIA. in: Michaelis. Moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 1998. Dicionários Michaelis, 2259 p.

Matemática Básica. [S. l.]. Disponível em: https://matematicabasica.net/exercicios-de-sequencia-numerica/. *Acesso em: 10 mar. 2021.*

UNICAMPI - Matemática. [S. l.], 2015. Disponível em: https://www.comvest.unicamp.br/vest2015/F1/f12015QW.pdf- Acesso em: 10 mar. 2021.

UEL - Matemática. [S. l.], 2009.

UEL - Matemática. [S. l.], 2014.

MACKENZIE - Matemática. [S. l.].

UDESC - Matemática. [S. l.], 2014.

UFPI - Matemática. [S. l.], 2009.

UNESP - Matemática. [S. l.], 2012.

USP - Matemática. [S. l.], 2009.

FUVEST - Matemática. [S. l.].

FEI - Matemática. SP, [S. l.].

UFSM - Matemática. [S. l.], 2011.